

2009年度後期

地球惑星科学のための古典力学及び古典力学演習

場所：5号館 305室 時間：金曜 3限(13:00-14:30) 及び4限(14:45-16:15)

内容：解析力学を中心に、全学教育での「力学」を補充して、問題を単に解く視点から、新しい課題を考える参考となる基本的原理を概観する。講義では基本となる考え方を重点的に解説する一方で、演習では多くの実用的な問題に役に立つ技巧的手法も含めて、具体的な問題解法に焦点をあてる。よってあなたが天才でない限り、両方を同時に履修することを条件とする。地球惑星科学の問題も適宜混じえる。

計画

- ・ニュートン力学とその他の解析力学の表現との関係
- ・ラグランジュ方程式の活用
- ・変分原理およびその一般化の例の紹介
- ・ラグランジアンからみた3つの保存則
- ・中心力の場による運動
- ・微小振動
- ・正準方程式
- ・回転系での運動
- ・剛体運動と回転
- ・粒子の散乱（時間に余裕のある場合）

評価 講義と演習の両方に対して、共通の最終試験を課す
講義：出席＋最終試験（＋中間試験を課すかもしれない）
演習：毎回の小テスト＋宿題＋最終試験（＋中間試験を課すかもしれない）

教科書 「解析力学」小出昭一郎、岩波書店
「力学」ランダウ・リフシッツ、東京図書

参考書 「解析力学」久保謙一、裳華房
「力学演習」後藤憲一他、共立出版

担当：蓬田清 理8号館 312室
アシスタント：都筑基博 理8号館 307室

オフィスアワー：~~火~~木 13-14時（出張等で不在の場合もあります）
火曜日は16:30-17:30に変更

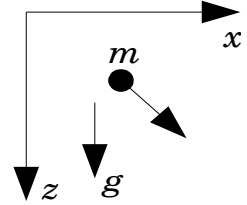
講義・演習時以外に宿題の提出する場合は、理8号館 312室の扉の横の封筒まで。

1. ラグランジュ方程式

問題1 一定の重力下で（重力加速度を g とする）自由落下する質量 m の質点の運動を考える。

(a) 右図の直角座標系を扱った場合のラグランジュ方程式を求めよ。

(b) 時刻 t で高さ h から自由落下する場合の質点の運動を (a) より求めよ。ただし、 $t=0$ で速度は x 方向に v_{x0} 、 z 方向に v_{z0} とする。



問題2 自然長 l 、バネ定数 $k=m\omega^2$ のバネに質量 m の物体をつけ、天井から吊した場合を考える。物体は上下方向のみに運動するとし、自然長からの伸びを z 、重力加速度を g とする。

(a) このときのラグランジアンを求めよ。

(b) z に対するラグランジュの方程式を求めよ。

(c) 上の方程式の一般解を求めよ。

(d) 初期条件 $z(0)=z_0$ 、 $\dot{z}(0)=v_0$ のとき、 $z(t)$ を求めよ。

問題3 (a) 円筒座標系 (r, ϕ, z) および、球座標系 (r, θ, ϕ) のそれぞれについて、直角座標系との関係を示せ。

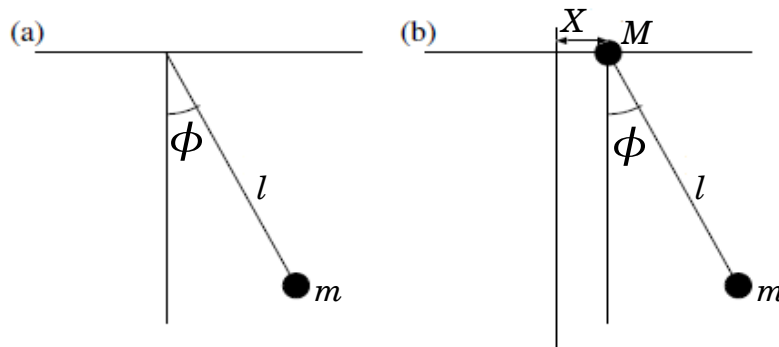
(b) 速度の2乗 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ ($\dot{x} = dx/dt$ など) について、円筒座標系および球座標系でそれぞれ表せ。

(c) 円筒座標系および球座標系における質量 m の質点についてのラグランジアン L を表せ。ただしポテンシャルエネルギーは位置のみによるとする。(何故か)

(d) 円筒座標系および極座標系の運動方程式をそれぞれ求めよ。

問題4 下図 a のように、長さ l の棒の先に質量 m の物体をつなぎ、もう一方の端を固定する。

- (a) 垂直方向から計った棒の角度を ϕ 、重力加速度を g として、ラグランジアンを求めよ。
- (b) ラグランジュの方程式を求めよ。
- (c) 固定されていた端に質量 M の質点をつなぎ、それが水平方向に運動できるようになっているとする(下図 b)。このとき、水平移動可能な質点の位置を X として、ラグランジアンを求めよ。



問題5 右図のように断面積 S の細いU字型の管の中に密度 ρ で全長が l の液体があり、重力加速度 g (一定) の下での運動を考える。図のように右側の部分でのつりあいの高さを $x=0$ として、 x 軸を鉛直下を正とする。これは単振動となるが、ニュートンの運動方程式から求めるのは難しい。

- (a) この液体の運動エネルギー K を求めよ。
- (b) 図の右側のように x だけ上に上がった場合、つりあった状態 ($x=0$) に比べてどれだけポテンシャルエネルギーが大きいか。(ヒント：図のような Δy の厚さの微小部分は $\Delta m \cdot g \cdot y = \rho g S y \cdot \Delta y$ だけポテンシャルエネルギーが大きい。これを Δy を dy として、0 から x まで積分すればよい)
- (c) (b) と同様に左側の x だけ凹んだ部分のポテンシャルエネルギーを求めよ。(b) とあわせて、この液体のポテンシャルエネルギーを求めよ。
- (d) (a) と (c) よりラグランジアンを求め、ラグランジュ方程式も示せ。
- (e) (d) の方程式より $x(t)$ についての解を求め、これが単振動と同じになることを示せ。またこの運動の角周波数および周期を求めよ。

