10. 剛体運動

「例題」は講義の時間に解説し，「問題」は演習の時間に解いてもらいます．

例題1 剛体の運動は, 静止系に対する並進運動と剛体の重心のまわりの回転運動によって記述される. 今, 剛体内の任意の点Pを静止系Oおよび剛体内の運動座標系O'から見たときの位置ベクトルを図1(a)のようにとると, $\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{R}}_0+\vec{\boldsymbol{r}}$ となる.

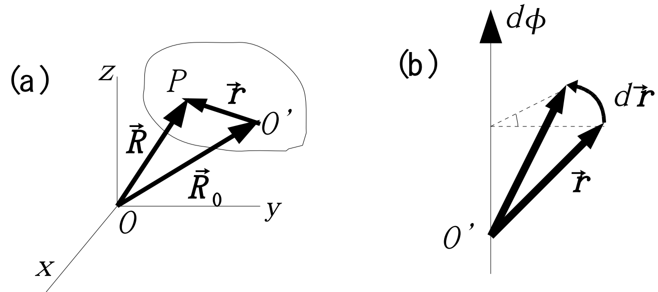

図1：

ここで図1(b) のように, O'を通る軸のまわりの回転を $d\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ とすると, $d\vec{\boldsymbol{r}}=d\vec{\boldsymbol{\Phi}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ であるから, この時間微分について, $d\vec{\boldsymbol{\Phi}}/dt=\vec{\boldsymbol{\omega}}$ とおけば,

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}=\frac{d\vec{\boldsymbol{\Phi}}}{dt}\times\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}. \tag{1}$$

ここで, $d\vec{\boldsymbol{R}}/dt=\vec{\boldsymbol{V}}, d\vec{\boldsymbol{R}}_0/dt=\vec{\boldsymbol{V}}_0$ とすると,

$$\vec{\boldsymbol{V}}=\frac{d\vec{\boldsymbol{R}}}{dt}=\frac{d\vec{\boldsymbol{R}}_0}{dt}+\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}=\vec{\boldsymbol{V}}_0+\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}. \tag{2}$$

このように, 剛体内の任意の点の静止系に対する速度 $\vec{\boldsymbol{V}}$ は, 剛体内の座標原点の並進運動の速度 $\vec{\boldsymbol{V}}_0$ と, 剛体の回転の角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ によって表すことができる.

(a) 剛体がある一点 (例えば重心) を固定されて運動する場合を考えよう. 剛体を質点の集合としてとして考えれば，固定点のまわりの全角運動量は,

$$\vec{\boldsymbol{L}}=\sum_i m_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i\times\vec{\boldsymbol{v}}_i) \tag{3}$$

と書ける. ここで, $\vec{\boldsymbol{r}}_i=(x_i, y_i, z_i)$ 及び $\vec{\boldsymbol{v}}_i(=\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}_i)$ はi 番目の質点の位置を示す位置ベクトル及びその速度であり, $\vec{\boldsymbol{v}}_i=\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}_i$ である. このとき, 角速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ の成分 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ を用いて, 角運動量 $\vec{\boldsymbol{L}}$ の各成分 (L_x, L_y, L_z) を表せ. (ヒント：ベクトル三重積の性質を利用する.)

(b) 剛体の運動は一般に, 慣性テンソル(又は慣性モーメントテンソル) I_{ij} (i, j はx, y, zの各成分) を用いて表され, 角運動量の各成分は

$$L_x=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z \tag{4}$$

$$L_y=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z \tag{5}$$

$$L_z=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \tag{6}$$

と書ける. (a) の結果から, 慣性テンソルの9 つの成分を示せ.

(c) 慣性テンソルは, 適当な座標軸を選ぶことにより対角化することができる. このような軸を慣性主軸といい, その時の対角成分 I_x, I_y, I_z を主慣性モーメントと呼ぶ. 以下のような形状を持つ物体についての主慣性モーメントを求めよ. ただし, 質量をMとし, 密度は一定とする.

1. 長さLの細い棒（太さは無視できる）
2. 長さL, 半径aの円柱

例題2 静止座標系における角運動量 $\vec{\boldsymbol{L}}$ の変化は. 系に加わる外力のモーメント $\vec{\boldsymbol{N}}$ を用いて

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}=\vec{\boldsymbol{N}} \tag{7}$$

と表される.

ここで, 剛体の慣性主軸を基準とした運動座標系 (x, y, z) で観測するとき, ベクトル $\vec{\boldsymbol{L}}$ の運動系に対する変化率を $d'\vec{\boldsymbol{L}}/dt$ で表すと,

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}=\frac{d'\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}+\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{L}} \tag{8}$$

と表される. このとき, $\vec{\boldsymbol{L}}=(L_x, L_y, L_z)$, $\vec{\boldsymbol{N}}=(N_x, N_y, N_z)$ とすると,

$$\frac{d'L_k}{dt}=I_k\dot{\omega}_k, \quad L_k=I_k\omega_k \quad (k=x, y, z) \tag{9}$$

となる. なお, $I_k\,(k=x, y, z)$ は剛体の主慣性モーメントである.

以上より, 剛体の回転運動に対する以下の方程式（オイラーの運動方程式）を導け. (ただし, 座標軸を $(x, y, z)=(1, 2, 3)$ とする.)

$$I_1\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3(I_2-I_3)=N_1 \tag{10}$$
$$I_2\dot{\omega}_2-\omega_3\omega_1(I_3-I_1)=N_2 \tag{11}$$
$$I_3\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2(I_1-I_2)=N_3 \tag{12}$$

問題1 以下のような, 質量M で密度が一様な物体の主慣性モーメントを求めよ.

(a) 半径R の円盤

(b) 半径R の輪

(c) 半径R の球

問題2 惑星などは普通は中心部分の密度が高く, 外側に向かって小さくなっている.

(a) 密度分布が球対称の球体, すなわち, 密度 ρ が半径rの関数 $\rho(r)$ の時に, 半径Rのこの球体の慣性モーメントIを表せ.

(b) 密度が一定のときは問題1 (c) と同じになることを確かめよ.

(c) 観測量から惑星の内部構造を推定する場合に重要なのは, 全質量Mと半径Rと慣性モーメントIとの比, I/MR^2 である. この無次元の値は地球, 月, 火星でそれぞれ, 0.33, 0.39, 0.37である. このことから3つの天体の内部構造についてどのようなことが推定されるか.