地球惑星科学のための古典力学演習

2.変分原理・最小作用の原理

「例題」は講義の時間に解説を行ったものを、再度まとめたものである。

例題1 変分法を用いてラグランジュ方程式を導出してみよう。
今、自由度fの力学系を考え、そのラグランジアンが$L(q_i, \dot{q}_i, t), (i=1,2,...,f)$で与えられるとする。以下では簡単のため、$L(q, \dot{q}, t)$とする。（これは自由度1の系を考えているのと同じである。）このとき、系の運動は次のような条件をみたす。ある時刻t_0およびt_1のとき、$q^{(0)}$、$q^{(1)}$にそれぞれあったとする。このような条件の下では、これらの二つの位置の間では、系は積分

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\,dt \tag{1}$$

が極値(厳密には停留値）を取るように運動する。この積分を、作用または作用積分という。ここで、(1）が極小値を取るような場合を考えてみよう。$q=q(t)$ がS を最小とするような関数であるならば、$q(t)$の近傍の新しい位置$q(t)+\delta q(t)$においては、Sはわずかに増加するはずである。この時のSの変化は

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1} \{L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)-L(q, \dot{q}, t)\}\,dt \tag{2}$$

と表せる。しかし、ここでは$q(t)$の微小な変分$\delta q(t)$を考えているので、このSの変化は第一近似的にはゼロとみなせる。つまり$\delta S=0$とかける。
これを**最小作用の原理**(または、**ハミルトンの原理**）という。このとき、(2）式からラグランジュ方程式を導ける。ただし、$\delta q(t_0)=\delta q(t_1)=0$とする。（ヒント：$L$をテイラー展開し、2 次以上の項を省略する。）

問題１　第２回小テストでは，『半径aの円周上のみを運動する質点』の問題を行った．同様にして, 半径aの球面上のみを運動する質量mの質点の運動について, 運動エネルギーはどのように表わされるか？また，そのポテンシャルエネルギーが質点の位置のみによるとすると, どう表わされるか. そして, ラグランジュ方程式により, この質点の運動方程式を求めよ.

問題２　ばねのように復元力が変位に比例し, 符号が逆の運動について, ラグランジアン及びその運動方程式を求めよ. ただし原点をつりあいの位置とする.
(a）x軸上の一次元運動（つまり復元力は$f_x=-kx$，kは定数)
(b）3次元直交座標（x, y, z）での運動

問題3 変分法を応用した簡単な問題を考える。 2 次元 xy 平面上の原点O(0,0)から任意の点 $P(x_1, y_1)$ に至る最短経路は「直線」であることを証明せよ。
（ヒント：任意の線に沿った距離を s として、その線に沿った積分を考える。このとき s を x, y で置き換えればよい。）

問題4 図1 のように点A と点B を結ぶある曲線を考える。今、点A を初速度0 で出発した質点が、この曲線に沿って落下し点B に到達する場合、A からB までの到達時間が最も短くなるような曲線の経路を求める。このような経路を**最速降下線**という。

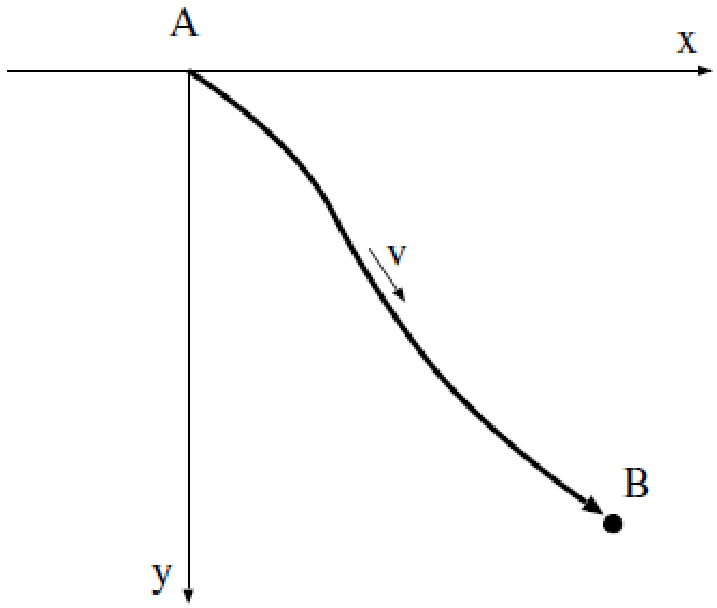

図 1:

（a）重力以外に外力が働かないとする。点A からB まで達するのに要する時間を t_{AB} とし、また y(=求めるべき経路）を x の関数として表し、これを x に関する積分方程式として表せ。（ヒント：経路に沿った距離 ds を通過する時の速度を v とすれば、そのときの通過時間 dt は $dt = ds/v$ とかける。）

（b）最速降下線を求める問題は、上の積分値の極値を求める問題に帰着する。上式の結果を用いて、ラグランジュ方程式を求めよ。 ここで、今は $y>0$ の場合のみを考えていることを考慮すること。

（c） 上で求めた微分方程式は y の２階微分方程式である。 これを変形し、１階の微分方程式として表せ。（ヒント： $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{y'}{y}$ を用いよ。）またこの微分方程式から x を y の関数として求めよ。 ここで、点Aは $x-y$ 座標の原点（0，0）にあるものとする。

（d）上の式において、 $y = c\sin^2\theta$（a は定数、θ は任意パラメータ）として、x および y を、c と θ の関数として表せ。

問題5　幾何光学の基本法則であるフェルマーの原理(Fermat’s Principle) から、スネルの法則(Snell’s Law) を導く。

フェルマー(Fermat) の原理では、位置AからBまでに至る光の経路(図a参照)は、その経路に沿った所要時間t が極小値となるものであることを示している。

これを式で表現してみよう。位置A からB にいたるまでの時間をt、経路に沿った微小距離をdsとし、光が通過する媒質中の屈折率$n(\mathbf{r})$ が位置の関数として与えられているとする。このとき、真空中の光速をc とすると、屈折率が$n(\mathbf{r})$の位置での光の速度 vは、 $v(\mathbf{r})=c/n(\mathbf{r})$ と表される。ここでA からB までの光の通過時間は、$t=\int(1/v)ds$ であるから、その変分は次のように表現できる。

$$\delta t=\delta\int\frac{1}{v(\mathbf{r})}ds=\frac{1}{c}\delta\int_A^B n(\mathbf{r})ds=0 \tag{3}$$

このように、通過経路に沿った屈折率の線積分が極小となるように光の経路が決まることがわかる。(光速c は定数であることに注意。)

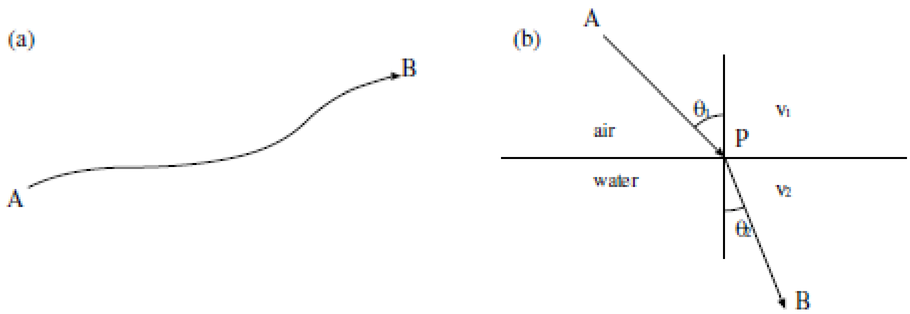

図 2:

ここで、空気と水が接しているような場合を考える(図b参照)。空気中の速度をv_1、水中の速度をv_2とし、光の入射角をθ_1、屈折角をθ_2とする。また、空気と水のそれぞれの媒質は均質であるとする。このとき、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=(\text{一定})$$

となることが知られている。これをスネル(Snell) の法則という。

(x, z) の2 次元平面内において、光が点P を経由して点A からB まで伝わるものとして、フェルマーの原理からSnell の法則を導け。