地球惑星科学のための古典力学演習

3. ベクトル・座標系

問題1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$を任意のベクトルとするとき、次の関係式を証明せよ。

$$(a)\ \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

(b) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

(c) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

(d) (a)は3つのベクトル$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$が3辺からなる平行六面体の体積となることを示せ。

問題2. 任意のスカラー関数$\phi(t)$及び任意のベクトル関数$\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)$に関する以下の関係式を証明せよ。

$$(a)\ \frac{d}{dt}(\phi\boldsymbol{A})=\phi\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{d\phi}{dt}\boldsymbol{A}$$

$$(b)\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$(c)\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}$$

問題3. 任意のスカラー関数$\phi(x,y,z),\psi(x,y,z)$及び任意のベクトル関数$\boldsymbol{A}(x,y,z)$, に関する以下の公式を証明せよ。ただし、$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$（$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$は$x$, y,z方向の単位ベクトル）とする。

(a) $\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$

(b) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})=(\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A}+\phi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(c) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$

(d) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

(e) ラプラシアン$\nabla^2\phi$は左辺のように定義されるので, $\nabla\cdot(\nabla\phi)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

(f) 直交座標では$\nabla^2\boldsymbol{A}=(\nabla^2 A_x,\nabla^2 A_y,\nabla^2 A_z)$と定義される。

すると、$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$

問題4.右図を参照して、ある軸のまわりの回転についてベクトルで表現することを考える。

(a) 回転ベクトル$\delta\vec{\phi}$を次のように定義する。$\delta\vec{\phi}$のベクトル方向を回転軸の方向とし、その大きさ$|\delta\vec{\phi}|$をその軸のまわりの回転角とする。回転方向は右ネジが進む方向を正とする。この場合に、位置$\vec{x}$にある点が$\delta\vec{\phi}$によって動く量$\delta\vec{x}$は

$$\delta\vec{x}=\delta\vec{\phi}\times\vec{x}$$

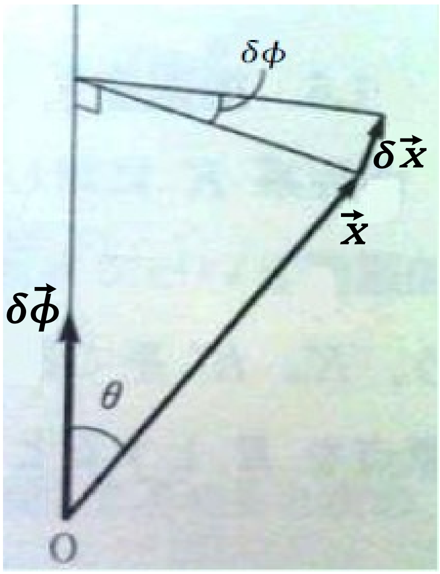
となることを示せ。

(b) 同様にある軸のまわりを回転する物体(正しくは剛体)について考える(例：自転する地球)。回転ベクトルと同様に、角速度ベクトル$\vec{\omega}$を定義する。このベクトルの方向は右ネジが進む方向を向き、大きさは角速度の値とする。(例：地球の自転では$\omega=2\pi$/24時間$=7.27\times10^{-5}sec^{-1}$)原点から$\delta\vec{x}$の位置にある点の速度$\vec{v}$は

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{x}$$

であることを示せ。

(参考問題のプレートテクトニクスの問題では、この結果を用いる)



参考問題：地球上のプレートの運動と回転表現

地球の表面上の多くの現象は、図１のように10数枚の剛体プレートが水平に相対運動をしていると仮定すると、説明ができる。これをプレートテクトニクスと呼ぶ。２つのプレートの境界線で一方のプレートＢが止まっているとして、他方のプレートＡの速度を「プレートＡのプレートＢに対する相対運動 relative motion」と呼ぶ。ある地点でのこの速度をベクトル${}_A\vec{v}_B$と表す。（この大きさは数cm/年程度である）

地球が平面ならば2つのプレート間の運動は並進運動となるので、${}_A\vec{v}_B$は図2のうに2つのプレートの境界線のどこでも一定である。つまり、${}_A\vec{v}_B$は位置によらず、このベクトルがプレートの相対運動を表す。

しかし、実際の地球は球面なので、プレートは平版ではなく、いわゆる球殻の一部である。これが地球の表面に沿って動くことになる。地球は中心から北極点方向に向いた角速度ベクトル$\vec{\omega}$によって自転運動が表現されるのと同じ問題と考えられる。図３に示すようにプレートの相対運動もある軸のまわりの回転運動として表現され、「プレートＡのプレートＢに対する相対運動」はこのような角速度ベクトル${}_A\vec{\omega}_B$として表現される。

平面での運動と異なり、球面上の回転運動では図３のように、プレート境界線上の位置によって相対速度そのものが変化する。回転の軸poleに近い点では速度は小さく、離れるほど大きくなっていき、軸から90度離れた点で最大となる。地球の自転では両極点ではゼロで、赤道上で最大になるのと同じである。境界線上のある点$\vec{x}$(原点である地球の中心からのベクトル)の速度は、問題4でも考えたように

$$\vec{v} = {}_A\vec{\omega}_B \times \vec{x}$$

と表される。

地球の大きなプレートの相対運動ベクトル$\vec{\omega}$は表にまとめる。現在ではGPSなどによる多くの点での$\vec{v}$の測定から、上式の$\vec{\omega}$が推定される。(図4)

これらを参考にして、南緯28度、西経71度の地点の南米ペルー沖のNAZCAプレートとSOUTH AMERICANプレートの相対速度ベクトルを求める。

(a) この地点と、NAZCA-SOUTH AMERICAN の極の距離(角度Δ)を求めよ。

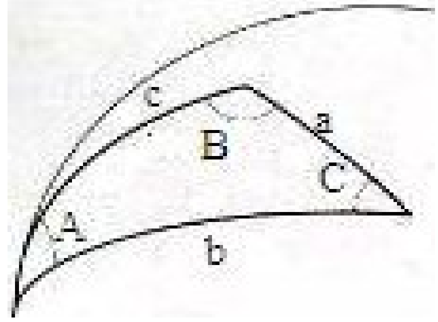
ヒント;直交座標でそれぞれのベクトルを$\vec{a}, \vec{b}$とすると$\cos\Delta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$である。

(b) (a)の結果からこの地点の相対運動の大きさを求めよ。単位はcm/年とすること。

(c) 球面では平面と同じように、以下のような正弦定理が成り立つ。(右図参照：長さをa,b,c,角度をA,B,Cとする)

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

これより、この地点のプレートの相対運動の方向を求めよ。



参考問題の図および表

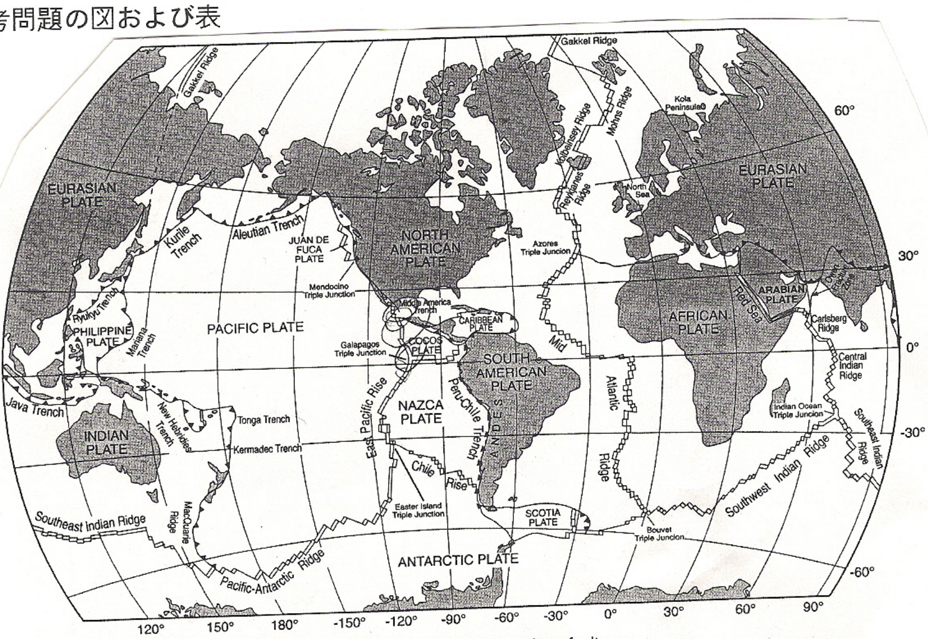


図 1

Figure 2.2. The major tectonic plates, mid-ocean ridges, trenches and transform faults.

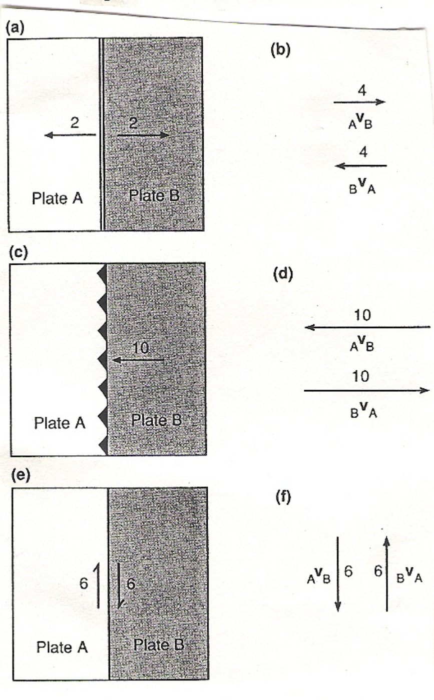


図 2

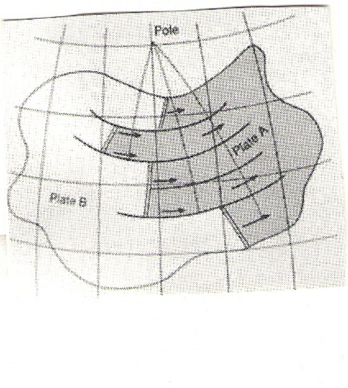


図 3

図 4

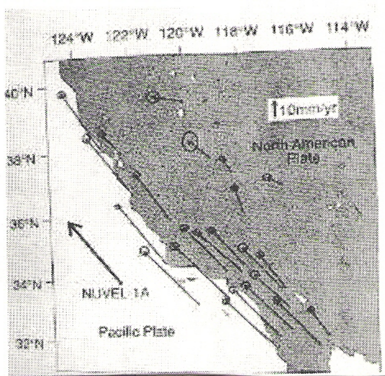


Table 2.1 *Rotation vectors for the present-day relative motion between some pairs of plates: NUVEL-1A*

Plates	Positive-pole position		Angular velocity
	Latitude	Longitude	(10^{-7} deg yr^{-1})
Africa–Antarctica	5.6°N	39.2°W	1.3
Africa–Eurasia	21.0°N	20.6°W	1.2
Africa–North America	78.8°N	38.3°E	2.4
Africa–South America	62.5°N	39.4°W	3.1
Australia–Antarctica	13.2°N	38.2°E	6.5
Pacific–Antarctica	64.3°S	96.0°E	8.7
South America–Antarctica	86.4°S	139.3°E	2.6
Arabia–Eurasia	24.6°N	13.7°E	5.0
India–Eurasia	24.4°N	17.7°E	5.1
Eurasia–North America	62.4°N	135.8°E	2.1
Eurasia–Pacific	61.1°N	85.8°W	8.6
Pacific–Australia	60.1°S	178.3°W	10.7
North America–Pacific	48.7°N	78.2°W	7.5
Cocos–North America	27.9°N	120.7°W	13.6
Nazca–Pacific	55.6°N	90.1°W	13.6
Nazca–South America	56.0°N	94.0°W	7.2

Note: The first plate moves anticlockwise with respect to the second plate as shown.
Source: After DeMets *et al.* (1990; 1994).

表