4.運動の保存則

例題1 力学における三つの保存則（エネルギー保存則、運動量保存則、角運動量保存則）を、ラグランジアンを用いて導いてみよう。

（a）エネルギー保存

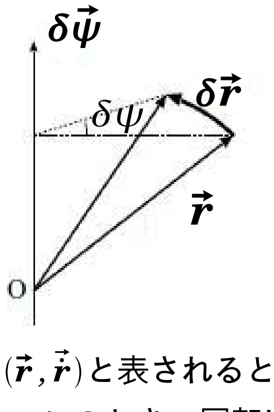
今、ラグランジアン$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i) (i=1, ..., f)$によって記述される自由度$f$の系の運動を考える。まず、$L$の時間による全微分を求め、ラグランジュの方程式よりLと$\dot{q}$を用いて、保存量を表せ。また、系の全運動エネルギーが$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$と表されるとき、この保存量が全エネルギーとなっていることを示せ。

（b）運動量保存

ラグランジアン$L(q_i, \dot{q}_i)$で記述される系の平行移動を考えよう。このとき、座標は q_iから$q_i + \delta q_i$に変化する。移動量は微小であり、また系のすべての点が同一方向に同じ大きさの変位をもつと考えれば、$\delta q_i = \varepsilon$（εは微小な定数）と表せる。この際の速度$\dot{q}_i$の変化はゼロであるとする。このような位置の変化に対して、ラグランジアンが不変であること（つまり、$\delta L = 0$）を用いて、全運動量が保存されることを示せ。

（c）角運動量保存

下図のように、ある軸のまわりの微小な回転ベクトル$\delta \vec{\boldsymbol{\psi}}$を考える。座標原点を回転軸上にとり、軸のまわりを回転している系の任意の質点に向かう位置ベクトルを$\vec{\boldsymbol{r}}$とすると、このとき、系の回転に対する位置ベクトルの先端の変位$\delta \vec{\boldsymbol{r}}$は、$\delta \vec{\boldsymbol{r}} = \delta \vec{\boldsymbol{\psi}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$と表される。



ここで、系のラグランジアンは$L(\vec{\boldsymbol{r}}, \dot{\vec{\boldsymbol{r}}})$と表されるとする。また、各質点の運動量$\vec{\boldsymbol{p}}_k$は$\vec{\boldsymbol{p}}_k = \partial L / \partial \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}_k$と表される。このとき、回転に対してラグランジアンは不変であること$(\delta L = 0)$を用いて、系の角運動量が保存されることを示せ。

（ヒント：ベクトル三重積の変換式を利用する。第3回の問題1(a)を参照。）

問題1 ある座標系でみると、全エネルギーがE_0、また全運動量が$\vec{0}$の質点系がある。この系の全エネルギーがE_1、全運動量が$\vec{P}_1$の状態にある外からの作用で変化したとする。この座標系に対して、速度$\vec{v}$で動いている座標系からみると、この質点系の全エネルギーと全運動量の変化はそれぞれどのようになるか。

問題2 質点の2次元運動を極座標(r,θ)で表す。中心力の他にϕ方向の力もかかるとした場合の、ラグランジュ方程式を求めよ。そして、ϕについての方程式は、「角運動量の時間変化率は作用する力のモーメント（トルク torque とも呼ぶ）に等しい」というニュートン力学の講義で以前に学んだことを示せ。

問題3 質点の角運動量の直交座標系での3成分およびその絶対値を円柱座標系を用いて示せ。

問題4 (a) 地球の半径をaとし、密度ρを一定とする。地球を完全にバラバラに破壊する（つまり全質量を無限遠に運び去る）のに必要なエネルギーを求めよ。ただし、構成物質の強度はないものとする。

(b) 上の問いでバラバラにした物質を再度、急激にかき集めたとしたら（つまり、放射によって外部に失うエネルギーはない）、地球は融解するか。（ヒント：物質の比熱$C_v=0.3\mathrm{cal/g\cdot K}=1.2\times10^3\mathrm{J/kg\cdot K}$とする）。46億年前に地球が誕生した時には、これに近い状況が起こったと考えられている。

問題5　2つの粒子の衝突を考える．質量m_2の粒子が静止している所へ速度$\boldsymbol{v}=(v_0,0)$とx方向から速度$v_0>0$で質量m_1の粒子が衝突する．

(a) 運動量は衝突前後で保存するので，2つの粒子が合体した場合の速度ベクトルを求めよ．また，この場合エネルギーが保存しないことを確かめよ．（このエネルギーの差はどんなことによるか?）

(b) 静止していた粒子がxの正方向に対して角度θで衝突後に動くとする．衝突前後でエネルギーが保存するとする（弾性衝突と呼ぶ）．運動量のx,y成分が保存することから，この角度の情報だけから，静止していた粒子の速度ベクトル$\boldsymbol{v}_2$と衝突後のもうひとつの粒子の速度ベクトル$\boldsymbol{v}_1$の関係式を求めよ．

(c) ガリレイ変換によって速度一定の別の座標系でも運動方程式は変わらないことがわかっている.この衝突において，全運動量がゼロとなる座標系（これを重心座標系とよぶ）はひとつの粒子の静止している座標系（これを実験室系とよぶ）に対して，どのような速度ベクトルで動くか．また，この重心系における，2つの粒子の衝突前と衝突後のそれぞれの速度ベクトルはどのようになっているか，まずx方向のみに衝突後も動くとして求めよ．

(d)（c）の場合に（b）のようにy成分もある場合はどうなるか．

テイラー展開の復習

$$f(a+x)=f(a)+f'(a)x^2+\frac{1}{2!}f''(a)x^2+\frac{1}{3!}f'''(a)x^3+\cdots$$ → $|x|\ll 1$ で初めて有効

たとえば $f(x)=x^s$ では

$f(a)$ がわかっている場合, $f(a+b)$ の値は, b が小さい, つまり $|b/a|\ll 1$ では

$$f(a+b)=(a+b)^s=\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^s=a^s\left(1+\frac{b}{a}\right)^s \qquad \left(\left|\frac{b}{a}\right|\ll 1\right)$$

$$=a^s\left[1+s\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2!}s(s-1)\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1}{3!}s(s-1)(s-2)\left(\frac{b}{a}\right)^3+\cdots\right]$$

例　$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ は知っているとして,

$f(a+b)$ に $\alpha=\frac{1}{2}$, a=2, b=0.002 をそれぞれ代入すると $\frac{b}{a}=0.001\ll 1$ より

$$\sqrt{2.002}=\sqrt{2(1+0.001)}=\sqrt{2}(1+0.001)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot 0.001+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(0.001)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)0.001^3+\cdots\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot 0.001+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(0.001)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)0.001^3+\cdots\right]$$

$<10^{-3}$　　$<10^{-6}$　　$<10^{-9}$ と収束がよい

$=\sqrt{2}(1+0.0005-10^{-6}$より小さい$+10^{-9}$より小さい$\cdots)\approx\sqrt{2}\times 1.0005\approx 1.414920668\cdots$

(正しくは $\sqrt{2.002}=1.414920492\cdots$)

テイラー展開の重要な例

$|x|\ll 1$ ならば

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$ (確かめよ)

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (確かめよ)

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$