

5. 運動の積分

例題 図1のように頂点を下にしておかれた円錐内の表面に沿って運動する質点(質量 $m$ )を考える。重力以外に力は働かないものとし、円錐の頂角は $2\theta$ である。

- (a) 円錐の頂点を鉛直軸の原点として、ラグランジアン $L$ を求めよ。また、運動方程式も求めよ。(ヒント: この運動の変数は $r$ と $\phi$ であることに注意。)この場合のように、ある座標自体がラグランジアンには含まれず、その座標の時間に関する微分(速度)のみが含まれる時、その座標を循環座標(cyclic coordinate)と呼ぶ。また循環座標がある場合には、それに対応する保存量が存在する。今の場合、循環座標は何か?また、この運動における保存量は何か?

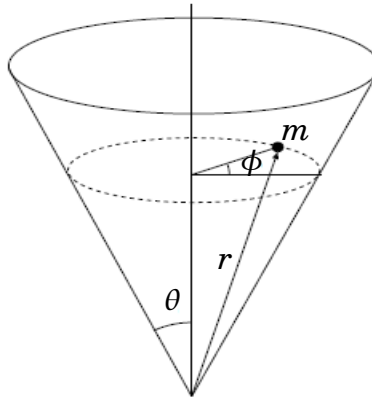


図 1:

- (b) 角運動量 $M (= \partial L / \partial \dot{\phi})$ を用いて、全エネルギー $E$ を $M$ を用いて表せ。さらにこの $E$ を用いて、時間 $t$ 及び座標 $\phi$ を $r$ に関する積分として求めよ。
- (c) このような運動は、位置 $r$ のみの関数として表される有効ポテンシャルを導入することにより、仮想的な1次元運動として取り扱うことができる。この場合の有効ポテンシャル $V'(r)$ を示し、その概略図を描き、 $r$ の関数としての質点の運動の様子を定性的に説明せよ。
- (d)  $r=R$ において初速 $v_0$ を水平方向に与えたとき、 $M$ を $R$ を用いて表せ。またこのとき、 $r=R$ での円運動となる場合の $v_0$ を求めよ。(ヒント; 有効ポテンシャルの極値を利用する。)

問題1 地球の周りを回る月について、地球-月系の慣性中心の位置は地球の中心に対して、どのくらい離れているか? 地球と月の質量や距離といった数値は自分で調べること。(潮汐現象などを考える場合にこのずれの大きさは重要である。)

問題2 二つの粒子が互いにポテンシャル $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ で相互作用している運動を考えてみよう。(たとえば、万有引力やクーロン力のもとでの運動のような場合。)ここで、 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ はそれぞれの粒子の位置ベクトルである。

- (a) 二つの粒子の質量をそれぞれ $m_1, m_2$ とするとき、ラグランジアンを求めよ。
- (b) (a)の結果を用いて2つの粒子それぞれに対するラグランジュの方程式を求めよ。
- (c) 二つの粒子の重心座標

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

と、相対座標

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (7)$$

を導入してみよう。このとき、全質量 $M = m_1 + m_2$ および換算質量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ を用いて、ラグランジアンを表せ。

- (d) (c)で求めたラグランジアンを用いて、 $\vec{R}$ および $\vec{r}$ のそれぞれに対するラグランジュの方程式を求めよ。

問題3 地球の表面から鉛直方向上向きに初速度 $v_0$ で質量 $m$ の物体を発射する。万有引力定数 $G$ と地球の質量 $M$ 、そして半径を $a$ とする。後日の演習問題で考えるが、この場合、地球からの引力は地球の全質量がその中心に集まったとみなしてよい。

- (a) この場合の平面内のラグランジアンを求め、運動方程式を示せ。
- (b) エネルギー保存則より、地球の中心からの距離の関数としての速度を求めよ。
- (c) (b)において $v_0$ がある値以上では永遠に地球から離れていく。その速度を求めよ。(これを第2宇宙速度と呼ぶ。ちなみに第1宇宙速度は地上で水平に投げた物体が地球を円運動する速度である。)また $v_0$ がこの値より小さい場合にはどこまで遠ざかるか?

問題4 振り子の支点部分に質量 $M$ の質点があり、この質点が水平移動可能な場合について考える(図2)。(第1回の問題1(c)を参照。)

- (a) このときの全エネルギーを示せ。
- (b) 前問の結果を元に、時間 $t$ を $\phi$ に関する積分で表せ。(ヒント：水平方向の座標 $X$ が循環座標であることに注意。)
- (c) 振り子の先端にある質点 $m$ は、どのような軌跡を描くか示せ。

