6. 中心力の場における運動・ケプラー運動

「例題」は講義の時間に解説し，「問題」は演習の時間に解く予定.

例題 1 力が距離 r の逆 2 乗の法則に従うような中心力の場における，質量 m の質点の運動 (例えば惑星のケプラー運動) を考えよう．このとき，ポテンシャル $V(r)$ は，

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

で与えられる．ここで, k は正の定数である．(もしこの運動が，質量 M の質点によって生じる万有引力のポテンシャルによる場合には，万有引力定数を G として，$k = GMm$ となり， $V = -\dfrac{GMm}{r}$ と書ける.) 以下では，運動が 2 次元平面内のみで行われるものとして，この運動を極座標 (r, ϕ) を用いて考える.

(a) この運動のラグランジアンを求めよ.

(b) r と ϕ それぞれについてのラグランジュ方程式から，運動方程式を求めよ．さらに角運動量 M を求め，それが保存されることを示せ.

(c) 全エネルギー E を，r と M を用いて表せ.

(d) 前問の結果より，時間 t を，r に関する積分として表せ.

(e) 角運動量保存則を利用して, ϕ を r に関する積分の形で表せ.

(f) この運動は 2 次元平面 (r, ϕ) での運動であるが，角運動量保存の式を用いて $\dot{\phi}$ を消去することで，動径成分 r のみに関する 1 次元運動とみなして解析することができる．このとき，万有引力によるポテンシャル $V(r)$ と，角運動量に関連した r に依存する項(遠心力ポテンシャル) とを足し合わせた仮想的なポテンシャル(有効ポテンシャル) $V'(r)$ を導入して，動径 r と有効ポテンシャル $V'(r)$ との関係を図示せよ．また，この運動で起こり得る軌道について定性的に説明せよ.

例題 2　例題 1 で導いた関係式を元に，この質点の運動に関する軌道（r と ϕ の関係式）を導く.

(a) 例題 1(e) で求めた関係式において，$u = \dfrac{1}{r}$ として，u に関する軌道を求めよ．この際，次の積分公式を用いると良い.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(c_1 - x)(x - c_2)}} \tag{1}$$

とみなして，c_1 と c_2 は $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ の 2 つの根 $(c_1 > c_2)$ とする．ここで $x = c_1 \sin^2\theta + c_2 \cos^2\theta$ と変数変換すると, びっくりすることが起こって積分が求まる.

(b) 前問の結果において，以下の関係式，

$$C=\frac{M^2}{mk},\ e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{mk^2}} \tag{2}$$

を利用して，C，e 及びϕを用いてrを表せ．この結果は，中心力のもとで運動する物体の軌道を与える一般式となる．ここで，e は一般に，**離心率**と呼ばれる．この時，$e>1$，$e=1$，$e<1$，$e=0$ に対する軌道は，どのような軌跡を描くか？全エネルギーE と離心率e との関係や例題 1(f) の結果を踏まえて考察せよ．

(c) 例題 1(b) の運動方程式を用いて，前問と同様の軌道に関する方程式を導いてみよう．まず運動方程式を変形し，$dr/d\phi$に関する微分方程式を求めよ．さらに，$u=\dfrac{1}{r}$として，u に関する微分方程式の一般解を求め，rとϕに関する軌道を表す関係式を求めよ．ただし，$\phi=0$において近日点となるものとする．（ヒント：近日点では，rが最小となることに注意．）

問題１ ケプラーの第１法則

(a) 軌道が楕円(長軸の長さa，短軸の長さb) の場合を考える．軌道半径r の 最小及び最大距離(アプス距離とも呼ばれる) をそれぞれr_1，r_2とすると，$2a=r_1+r_2$となる．また楕円運動では，r_1，r_2の点において，動径成分の速度($\dot{r}$) がゼロとなる．これらの楕円の性質と，エネルギー保存に関する式を用いて，rをa，e及びϕを用いて表せ．(ヒント：2 次方程式の解の性質を利用し，Cをaとeを用いて表す．)

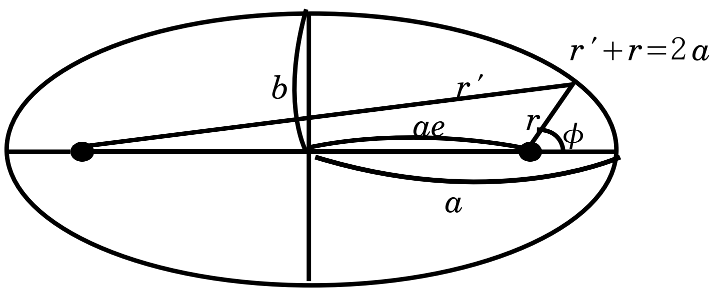


図 1:

(b) 前問の結果が楕円の極座標表示になっていることを確かめよう．まず，図１に示すような楕円の幾何学的性質から，前問の結果を導け．さらに，デカルト座標における楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

より，同様の結果を導け．
またこの式から，アプス距離$r_{1,}\ r_2$を求めよ．ただし，$r_1<r_2$とする．

問題 2 ケプラーの第 2 法則

(a) 時間 dt の間に ϕ は $d\phi$ だけ変化するものとする(図 2)．このとき，変化する動径ベクトルと質点の軌跡に囲まれた部分の面積 dA を求めよ．また角運動量を A の関数として表し，ケプラーの第二法則（単位時間当りに質点の動径ベクトルが描く面積は一定）が成り立つことを示せ．

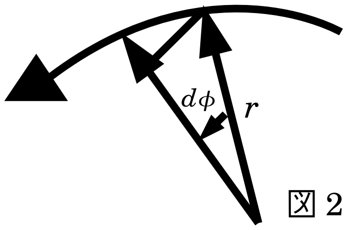


図 2:

問題 3 ケプラーの第 3 法則

(a) 問題 2(a) で求めた面積速度 $\dot{A}$ を，1 周期 T に渡って積分することで，惑星の公転周期 T と楕円軌道の長径 a との関係式を求め，ケプラーの第三法則 (惑星の公転周期の 2 乗は，その惑星の楕円軌道の長径の 3 乗に比例する) が成り立つことを示せ．(ヒント：短径 b を，長径 a と離心率 e とを用いて表し，問題 1(a) でも利用した e と M の関係式を用いる．また，楕円の面積は $A=\pi ab$ となる．)

(b) ケプラーの第三法則を，前問とは別の方法で示してみよう．例題 1(d) で求めたように，時間 t は積分の形で表現できる．この楕円運動に対して，$r=a(1-e\cos\psi)$ として変数変換を行なった上でこの積分を実行し，楕円運動の周期 T を求めよ．ただし，周期 T に対する ψ の積分範囲は $0\leq\psi\leq 2\pi$ である．(ヒント：例題 1(f) における考察より，楕円運動では $E<0$ であるから，$E=-|E|$ と置き換え，さらに被積分関数を a, e, r で表す．)

問題 4 地球(あるいは任意の天体)の外の点 P の重力ポテンシャル U を考える(図 3 参照). これは, 体積 V の質量要素 dm の積分

$$U(P)=-G\int_V \frac{dm}{R} \tag{4}$$

で表される. ここで G は重力定数であり, R は考える質量要素 dm と点 P との距離である. 原点 O と点 P との距離を r, 原点と dm との距離を r', そして原点 O から見た dm と点 P とのなす角を ψ とする.

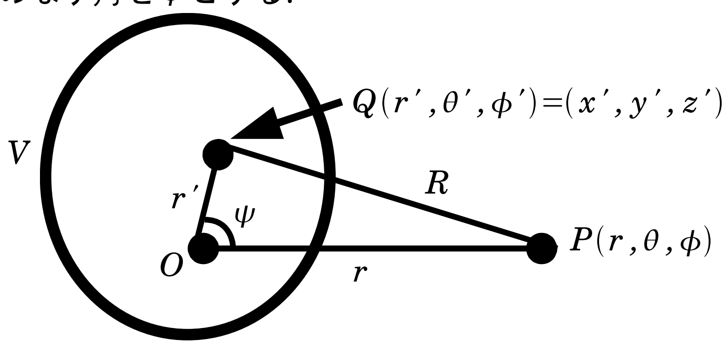
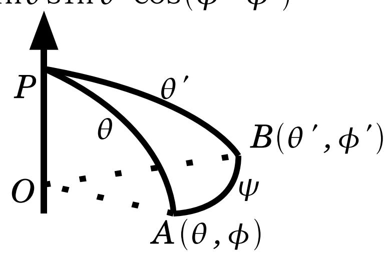


図 3:

(a) 余弦定理(5 式)を導け. また, これを用いて, R を r, r' および ψ で示せ.

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \tag{5}$$



(b) 点 P は体積 V の十分外側, つまり $r>r'$ とする. U(P)を r'/r の正のべき乗 $(r'/r)^n$ としてテイラー展開し, n=2 まで求めよ.

(c) (b)のテイラー展開のゼロ次(n=0)の項は原点にすべての質量が集まった場合, また 1 次(n=1)の項は重心に関係することを, それぞれ示せ.

(d) もし地球が一様の球(半径 a, 密度 ρ_0)とすると, 点 P が地球の外($r>a$)と内($r<a$)の場合, それぞれどのようになるか示せ. (ヒント：$dm = \rho_0 dV = \rho_0 r'^2 dr' \sin\psi\, d\psi\, d\phi$と極座標で表し, 積分する. この場合に $\phi: 0 \to 2\pi$ で, ψ と R は(a)の結果より変数変換することで, 積分できる. 積分範囲は$\psi: 0 \to \pi$, $R: |r - r'| \to r + r'$ に対応する.)

(e) 点 P が地球の外および内の場合の重力を求めよ.

問題 5. $U(r) = -\dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r^2}$ の形のポテンシャルによる中心力が働く場合,以下の問いに答えよ. ただし, a, bは正または負のいずれかの場合も考えて, 場合に分けて解答しなくてはいけない問いもあることに注意.

(a) つりあいの位置および,斥力と引力の働く範囲を示せ.

(b) 全エネルギーが正または負の場合について, 質点が存在しうる範囲と角運動量 M, および a,b の値との関係を求めよ.

(c) E<0 で r=0 (つまり中心) まで到達しうる条件を求め, そのときの軌道の概略を述べよ.

(d) a>0,E<0 の場合について, r が最小となる位置 (近日点) が r の一周の間に移動する角度$\Delta\phi$と b の関係を求めよ (ヒント：講義で示したエネルギー積分の形のみを求めるだけでよい). そして, b=0 の時に通常のケプラーの運動の式,すなわち $\Delta\phi = 2\pi$ と近日点が不動となることを示せ.

問題 6. 地上から高さ h(地球の半径を R とする)の高さまで上がったロケットを姿勢制御した後で, 水平方向にv_0の速度で人工衛星を打ち出す.この時の人工衛星の軌道, すなわち楕円軌道のケプラー運動のパラメーターを求めよ. (ヒント：全エネルギー E と角運動量 M を求めて, 講義で示したケプラー問題の軌道の式と対応させるだけでよい)