7. 微小振動

「例題」は講義の時間に解説し，「問題」は演習の時間に解く予定.

例題１ 図１のように，長さ l_1，l_2 の二つの軽い棒につながれた二つの質点(質量 m_1，m_2) からなる二重振り子の連成振動について考える．重力加速度は g とする．

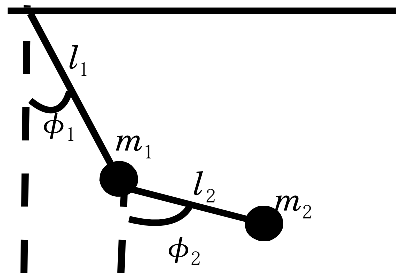

図1:

(a) この系のラグランジアンを求めよ．

(b) ϕ_1 及び ϕ_2 に関する運動方程式を求めよ．

(c) 微小振動($\phi_1 \ll 1$，$\phi_2 \ll 1$) であるとき，この系の固有振動数 ω を求めよ．(ヒント： $\phi_1 = A_1 \exp(i\omega t)$，$\phi_2 = A_2 \exp(i\omega t)$ として，A_1，A_2 に関する連立方程式を求め，それが解を持つための条件を考慮する．)

例題２ バネにつながれた質点に，速度に比例する摩擦力が働く場合について考える．

(a) バネ定数を k，摩擦係数を α とすると運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{1}$$

で与えられる．この運動の一般解を求めよ．(ヒント： $\lambda = \alpha/2m$，$\omega_0^2 = k/m$ とし，$x = e^{st}$ とおいて s についての２次方程式に変換してから, これを解く．)

(b) (a) において，外力 $f_0 \cos\gamma t$ (γ は定数) が加わった場合について考える（強制振動）．このときの運動方程式は，

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}\cos\gamma t \tag{2}$$

で与えられる．この運動の一般解を求めよ．(ヒント：このときの一般解は，同次方程式の一般解(前問の解) と非同次方程式の特解との和で表せる．)

問題１ 図２のように, バネで結ばれた二つの質点の連成運動を考える. ただし, 運動は x 軸方向のみで起こるとする.

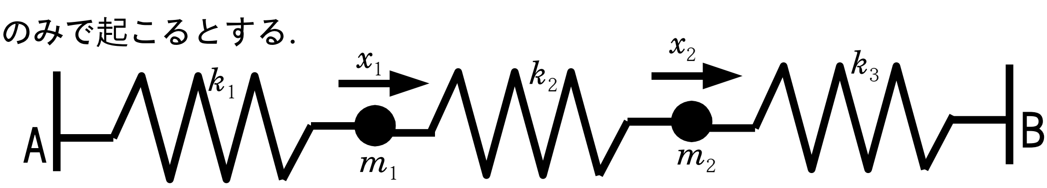

図 2:

(a) それぞれの質点の変位を x_1，x_2 として，この系のラグランジアンを求めよ．なお，バネ定数は図に示す通りとする．

(b) x_1，x_2 に関する運動方程式を求めよ．

(c) この系の固有振動数 ω を求めよ．（ヒント：例題 1(c) と同様．）

(d) (b) で求めた運動方程式より，この運動の一般解を求めよ．

問題2 第1回問題1(c) および弟5回問題4について考える（振り子の支点に質量 M の支点があり, これが水平方向に移動可能とした場合).

(a) 座標原点から支点までの距離を X，鉛直方向から振子の角度を ϕ，重力加速度を g として，この系のラグランジアンを X 及び ϕ を用いて求めよ.

(b) ϕ についての運動方程式を求めよ．ただし，$\omega_0=\sqrt{g/l}$ とする.

(c) 振子の支点が x 軸上で $X=X_0\cos\omega t$ の振動を行い，また振子が微小振動をする場合 $(\sin\phi\approx\phi, \cos\phi\approx1)$ の運動方程式を求めよ．（強制振動の方程式となる）

問題3 図3に示すように質量 m, 系の長さ l の振り子が二つ, 重さのないバネで結ばれて平行につながっている. ただし, ゆれは小さいとして, $(\sin\phi_i\approx\phi_i(i=1,2))$, x_1, x_2 という水平方向の変位で運動が表現できるとする.

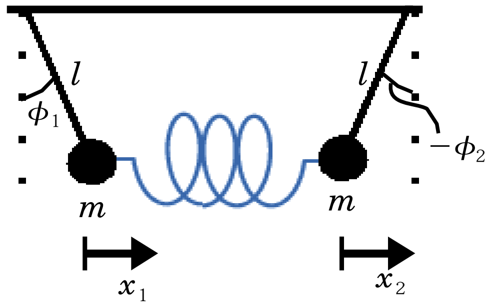

図 3:

(a) この系のラグランジアンを求めよ.

(b) 運動方程式を求めよ.

(c) この系の基準振動の動き, および周波数を求めよ.

(d) 質点が静止した状態から, 右側の質点をそのままにして, 左側の質点を少しずらして手を離したときの振動の様子を求めよ. (ヒント: 「うなり」という現象になる)

問題4 t=0 でつりあいの位置にある角周波数 ω, 質量 m の一次元振動子を考える. 以下に示すようにそれぞれの力が加わった場合の運動を求めよ.

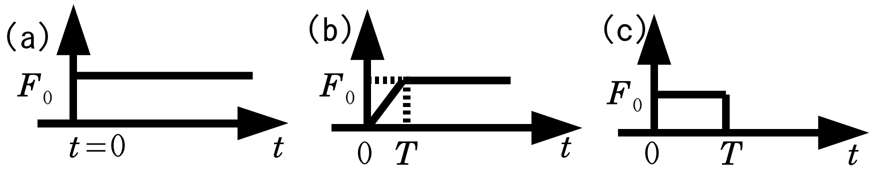

図 4:

問題5 質量が 1:2:1 の図5のような質点が十分に軽い延び縮みする2本の同種の棒でつながっているとする. 運動は棒の方向の x とそれに垂直な y 方向のみとし, 動きも小さいので, 2つの運動は独立とみなせるとする. また, x 方向と y 方向のバネ定数をそれぞれ k,k' とする.

(a) x 方向および y 方向のポテンシャルエネルギーをそれぞれ求めよ. ここで y 方向については3つの点が直線上にならんだ場合に力はかからない, すなわち, ポテンシャルがゼロになるという条件の下に考えよ (つまり, 図6のようだと運動には寄与しない).

(b) ラグランジアンを求めよ.

(c) x 方向についての運動方程式を求め，その基準振動のモードおよび角周波数を求めよ.

(d) (c)と同じものを, y 方向について求めよ.

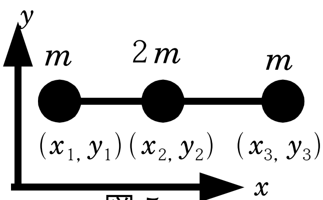

図 5:

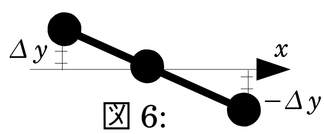

図 6: