8. ハミルトンの正準方程式

「例題」は講義の時間に解説し，「問題」は演習の時間に解いてもらいます．

例題 1 ラグランジュ形式では，自由度 s の系に対し，一般座標 q_i とその時間微分 $\dot{q}_i(i=1, ..., s)$ で表されるラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ を用いて，系の力学的状態を記述してきた．今，一般運動量 p_i を次のように定義する．

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

ここで，q_i と p_i によって表される関数 H を次のように定義する．

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L \tag{2}$$

この H をハミルトニアン(*Hamiltonian*) またはハミルトン関数と呼ぶ．

(a) p_i と q_i を独立変数とみなし，ラグランジアンの全微分を利用して，次の方程式を導け．

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} (i=1, 2, \ldots, s) \tag{3}$$

一般に，この $2s$ 個の連立の微分方程式をハミルトン方程式または正準方程式 (canonical equation) と呼び，変数 p_i, q_i を正準変数と呼ぶ．

(b) オイラー・ラグランジュの運動方程式は，変分原理に基づいて導出することができた．次の作用積分

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{4}$$

の変分が 0 となることと，(2) 式の変換式を利用し，ハミルトンの正準方程式を導け．ただし，$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$ とする．

例題 2 正準変数を $q_j, p_j (j=1, 2, ..., s)$ とし，u, v, w のそれぞれを座標，運動量および時間のある関数とする．このとき，ポアッソンの括弧式(Poisson Blacket) は次のように定義される．

$$[u, v] = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial v}{\partial q_j} \frac{\partial u}{\partial p_j} \right) \tag{5}$$

これを用いて，以下の関係式を示せ．

(a) $[u, v] = -[v, u]$

(b) $[u+v, w] = [u, w] + [v, w]$

(c) $[uv, w] = u[v, w] + v[u, w]$

(d) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ （これはヤコビの恒等式と呼ばれる．）

(e) $[q_k, q_i] = 0, [p_k, p_i] = 0, [q_k, p_i] = \delta_{ki}$

例題 3 正準変数 (q_i, p_i) がハミルトンの正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{6}$$

を満たす時，$Q_i(q,p,t)$，$P_i(q,p,t)$ も次の正準方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q,P,t)}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q,P,t)}{\partial Q_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{7}$$

を満たすならば，(q_i, p_i) から (Q_i, P_i) への変換を，正準変換という. ここで $K(Q,P,t)$ は，新しい正準変数 (Q_i, P_i) に対応するハミルトニアンである．(ここでは,H や K 等の関数の変数依存関係を示す括弧内では，各変数に対する添字 i を省略する.) 今，座標，運動量および時間の任意関数 F を導入する．正準方程式は，位相空間(q, p で表される空間) における最小作用の原理から得られることや，端点での変分がゼロとなる条件から，

$$\sum_{i=1}^{s} p_i dq_i - H(q,p,t)dt = \sum_{i=1}^{s} P_i dQ_i - K(Q,P,t)dt + dF \tag{8}$$

と書ける．この時，関数 F を正準変換の母関数と呼ぶ.

(a) 独立変数を q_i, Q_i とし，$F=F_1(q,Q,t)$ とすれば，次の関係式が得られることを示せ.

$$p_i = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{9}$$

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t} \tag{10}$$

(b) 独立変数を q_i, P_i とし，$F=-\sum_{i=1}^{s} P_i Q_i + F_2(q,P,t)$ とすれば，次の関係式が得られることを示せ.

$$p_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{11}$$

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} \tag{12}$$

(c) 独立変数を p_i, Q_i とし，$F=\sum_{i}^{s} p_i q_i + F_3(p,Q,t)$ とすれば，次の関係式が得られることを示せ.

$$q_i = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{13}$$

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial t} \tag{14}$$

(d) 独立変数を p_i, P_i とし，$F=\sum_{i}^{s} (p_i q_i - P_i Q_i) + F_4(p,P,t)$ とすれば，次の関係式が得られることを示せ.

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_i} \quad (i=1,2,\ldots,s) \tag{15}$$

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial t} \tag{16}$$

(e) $F_1(q,Q) = \sum_{i=1}^{s} q_i Q_i$ は，q と p の役割を入れ換えることを示せ.

(f) $F_2(q,P) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i$ は，恒等変換であることを示せ.

(g) 直交座標系(x, y) から，極座標系 (r, ϕ) への変換は正準変換である．このときの母関数を求めよ．ただし，直交座標系での運動量を (p_x, p_y) とする．また，極座標系での運動量 (P_r, P_ϕ) を示せ．(ヒント:上の F_3 型変換を用いる．)

問題 1 外力 $F(g)=-bq+aq^2\,(a, b>0)$ の下で一次元運動を行う質量 m の運動について, 以下の問いに答えよ.

(1) ラグランジアンを求めよ. ただしポテンシャルエネルギーは $q=0$ でゼロとする.

(2) 運動方程式を求めよ.

(3) 運動量をまず求め, 続いてハミルトニアンを求めよ.

(4) 正準方程式を求めよ.

(5) 全エネルギー E が保存することを示し, その値を求めよ.

(6) $U(q)$ を簡単に図示し, E の値によって運動の範囲がどうなるか説明せよ.

(7) (6) の結果を用いて, (q, p) という 2 次元位相空間における E の値によって軌跡がどのような形になるか, 簡単に図示せよ.

問題 2 外力の働かない s 個の質点系 (質量 m_i, $i=1, \ldots, s$, 相互作用はあるとする) をある基準慣性系 S_0 に対して, 一定の速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_0=(u_{0,} v_{0,} w_0)$ で動くもうひとつの慣性系 S からみる時, この S からみた座標系を一般座標として, ハミルトニアンを求めよ. これと, S および S_0 からみた運動に対する全エネルギーと比較せよ. また S および S_0 からみた全運動量はどうなるか.

問題 3 一様な重力場の中の質点についての Hamilton-Jacobi 方程式を作り, その解から運動を求めよ.

問題 4 単振動についての Hamilton-Jacobi 方程式を作り, その解を求めよ.

問題 5 一つの定点の原点についての角運動量成分を L_x, L_y, L_z として, $L_z=(L_x, L_y)$, $L_x=(L_y, L_z)$, $L_y=(L_z, L_x)$ を示せ.

問題 6 ケプラー運動と同じポテンシャル $U(r)=-\alpha/r\,(\alpha>0)$ について極座標で考える.

(a) この運動のハミルトニアンを求めよ. 平面運動であることに注意.

(b) 正準方程式を求めよ. また, 保存する角運動成分 M を用いて, 全エネルギー E を表せ.

(c) 円運動について, (p_r, r) および (p_ϕ, ϕ) の位相空間での軌跡を求めよ.

(d) 円運動からほんの少しずれた場合の運動を位相空間で求めてみる. そのために, $r\equiv r_0+\Delta r$ (r_0 は円運動で一定, Δr は微小量)として, (b) の正準方程式や E で Δr の高次の項を除くとして, $\dot{p}_r$ と E をまず表せ. そして, E の形式より, (p_r, r) 位相平面内の軌跡を求めよ. さらに, (p_ϕ, ϕ) についての正準方程式から, ϕ 方向についての位相空間での軌跡を求めよ.