9. 非慣性系における運動

「例題」は講義の時間に解説し，「問題」は演習の時間に解いてもらいます．

例題 1 ニュートンの運動法則が成立するような座標系を慣性系と呼ぶ．ある慣性系に対して，静止又は等速運動しているような座標系もまた慣性系である．一方, ある運動座標系が，慣性系に対して加速度を持っているような場合，これを非慣性系 (又は加速度座標系) と呼ぶ．

ここでは，回転している座標系 (非慣性系) に対する運動を考えてみよう．ただし，ここで考える回転座標系は，慣性系に対して並進運動はしていないものとする．

(a) 回転座標系に対する運動方程式を導け．(回転座標系におけるベクトルの微分に注意すること．）

(b) 慣性系におけるラグランジアンは次式で表されるとき，回転座標系におけるラグランジアンを求めよ．

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-V \tag{1}$$

(c) 前問のラグランジアンから，運動方程式を求めよ．((a) と同じ結果になる．)

問題 1 z 軸のまわりに反時計方向に一定の角速度 ω で回転した (x,y) 平面での質量 m の質点の運動を考える.

(1) 2 次元平面での質点の方程式 $m\ddot{x}=f_x$, $m\ddot{y}=f_z$ はこの回転座標系の上ではどのようになるか. (ヒント: 回転座標系 (x',y') と静止座標系 (x,y) の間の関係を, $\sin\omega t$ や $\cos\omega t$ を用いた式でまず表し, これを時間について 2 回微分すればよい.)

(2) (1) の結果より講義において 3 次式の一般的な場合で求めた Coriolis 力 $-2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ と遠心力 $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ に対応することを確かめよ.

問題 2 赤道上の遠心力 (自転による) はどのくらいの大きさか, 具体的な数字と単位を示し, 重力値と比べよ.

問題 3 Coriolis 力を考慮した場合, 北緯 60 度の地点で高さ 490m の所から物体を落下させた時, 物体はその真下の地点からどれだけずれた地表面に落下するか. ただし, 空気抵抗は考慮に入れない.

問題 4 北緯 45 度を東へ 10m/s で航行する船上での重力値は, 静止した船のそれに比べてどれだけ異なるか. また, 西へ 10m/s で航行した場合はどうなるか. (このような Coriolis 力による重力変化をエトベス (Etövös) 効果と呼ぶ.)

問題 5 日本付近の天気予報の図に出てくる気圧配置のスケールでは, 地衡風 (geostrophic wind) が基本になって風が流れている. 図のように, 気圧勾配による力 $\vec{f}=-\nabla p$ (圧力 p の勾配に比例する高気圧から低気圧側への力) とコリオリ力 $2\vec{v}\times\vec{\Omega}$ ($\vec{v}$ は速度ベクトル, $\vec{\Omega}$ はその地点での自転の角速度ベクトル) がつりあっている (図は北半球の場合). 単位質量あたりの値を考え, 以下の問いに答えよ.

(a) 北緯 30 度の地点の自転の角速度ベクトルの 3 成分 $\vec{h}=(h_x, h_y, h_z)$ を符号も含めて答えよ. ここで東を x の正, 北を y の正, 鉛直上向きを z の正とする.

(b) 図のような低気圧付近の大気の運動は 2 次元平面運動とみなしてよい. (a) の地点での水平運動に対するコリオリ力の各成分を, $\vec{h}$ の各成分と風速 $\vec{v}$ を用いて表せ.

(c) 図のような低気圧では中心方向に気圧傾斜による力 $f=-\dfrac{\partial p}{\partial r}$ (中心方向に向かって p は小さくなるのでマイナスの符号がつく) の力がかかる. f と (b) のコリオリ力がつりあう地衡風は, 図のように反時計回りとなることを示せ. (ヒント: 水平 2 成分の力のつりあいを符号に注意して説明すればよい)

(d) (a), (b) の問いで気づくように, 図のような低気圧で重要なコリオリ力の成分は緯度によって異なる. 北海道と沖縄ではどちらが大きいか? また, もし全く同じ気圧配置の低気圧があったら, どちらの地域の地衡風の方が強いか.