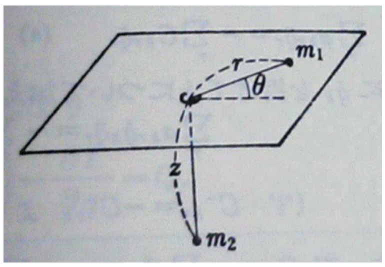
地球惑星科学のための古典力学・同演習
最終試験
2009 年 1 月 29 日　14:45 ー 16:15
(ノート・本等の持ち込み不可)

1. 質量 m の質点の 2 次元平面運動において, ポテンシャルは位置のみによるとする. (a) と (b) のそれぞれについて, 直交座標 (x, y) および極座標 (r, ϕ) での表現を求めよ.
   (a) ラグランジアン L とその運動方程式
   (b) ハミルトニアン H と正準方程式

2. 一つの質点の角運動量ベクトル $\vec{\boldsymbol{M}}$ について, 以下の問いに答えよ.
   (a) 直交座標系における, $\vec{\boldsymbol{M}}$ の各成分 (M_x, M_y, M_z) を座標ベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}=(x, y, z)$ と運動量ベクトル $\vec{\boldsymbol{p}}=(p_x, p_y, p_z)$ によって表せ.
   (b) (a) の結果を用いて, $M_z=(M_x, M_y)$ を示せ. ただし, ここで ( ) は以下のポアッソンの括弧式である. $q_i, p_i (i=1, 2, 3$ または $x, y, z)$ は座標と運動量の各成分である.

$$(A, B)=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j}-\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial A}{\partial p_j}\right)$$

3. 図のように水平板に開けた小さな穴に長さ l の糸を通し, 板上の糸の端に質量 m_1 の質点をつけて板上におく. 一方の板下の糸の端には質量 m_2 の質点をつけて, 鉛直に垂れ下ろし, 板上の質点を板上で運動させる. ここで, 板や穴は十分に滑らかと仮定し, 糸の質量は考えない. また, 重力加速度は g で一定とする.
   (a) 板上の糸の長さを $r(t)$ として, ある方向を基準にして穴からの m_1 の角度を $\theta(t)$ とした場合の質点 m_1 の運動エネルギーを示せ.



   (b) 質点 m_2 の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを示せ.
   (c) この系のラグランジアンを求め, ラグランジュの運動方程式を求めよ.
   (d) 質点 m_1 の穴のまわりの角運動量を示せ. また, この値は保存するか説明せよ.

裏へつづく

4. 静止している2次元x-y平面に対して, その原点で一定の角速度Ωで回転するx'-y'座標系を考えよ（つまりz軸まわりの回転). 質量mの質点の位置$(x(t), y(t))$または$(x'(t), y'(t))$として, ポテンシャルエネルギーは位置のみによるとする.
   (a) x-y座標系でのラグランジアン, 及び運動方程式を求めよ.
   (b) x'-y'座標系での速度$(\dot{x}', \dot{y}')$とx-y座標系での速度$(\dot{x}, \dot{y})$との関係を示せ. (講義で示してきたベクトルの外積を用いた表現を思い出せないときは次の回転の関係を用いれば求められる.)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   (c) x'-y'座標系でのラグランジアンを求めよ.
   (d) x'-y'座標系での運動方程式を求め, コリオリ力と遠心力の項をそれぞれ示せ.

5. 惑星などの天体は重力の効果によって中心部分の密度が高く, 外側に向かって小さくなっている. 密度が一定の場合, 半径R, 全質量Mの球の慣性モーメントは$I=\frac{2}{5}MR^2$である.

天体の慣性モーメントを$I=\alpha MR^2$とすると, 係数αは地球, 月, 火星ではそれぞれ0.33, 0.39, 0.37である. このことから3つの天体の内部構造について, どのようなことが推論されるか. 簡単に説明せよ.

6. 地球の全質量をM, 半径をa (6400km とする), 万有引力定数をGとする. 地球の外側(半径rの所を考えると, $r \geq a$)では中心に質点Mがあった場合の重力場と同じとして, 以下の問いに答えよ.
   (a) 地表面での重力値g_0を表せ.
   (b) 地表面から高さhの点の重力値g_1を表せ.
   (c) (a)と(b)の差, すなわち, $\Delta g \equiv g_1 - g_0$を求めよ. さらに, $h/a \ll 1$としてΔgの近似式をh/aの1次の項まで求めよ.（ヒント: $f(1+x)=f(1)+f'(1)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(1)\cdot x^2+\cdots$ ただし$x \ll 1$）
   (d) この問題では便宜上, $g_0=1000\ \mathrm{cm/s^2}$とする. (c)の結果を用いて, 高さ1km の塔の上では地表面に比べて重力値はどれだけ大きいか, 小さいかを有効数字2桁で答えよ.