

地球惑星科学のための古典力学・同演習

中間テスト

(ノート等不可)

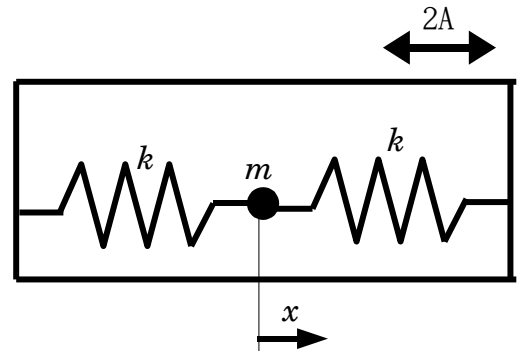
2009年12月25日(金) 45分間

1. 質量  $m$  の質点の2次元平面運動で、ポテンシャルは位置のみによるとする。(a) と (b) のそれぞれについて、直交座標  $(x, y)$  および極座標  $(r, \phi)$  での表現を求めよ。

(a) ラグランジアン  $L$  とその運動方程式

(b) ハミルトニアン  $H$  と正準方程式

2. 箱の中で2本のばね (ばね定数  $k$ ) で右図のように質量  $m$  の質点を左右から引っばっているとする。運動はばねの長さ方向 ( $x$  とする) のみとする。摩擦はないとする。



(1) この質点のラグランジアンを求めよ。

(2) この質点の運動方程式を求め、それが単振動であることを示し、その周期を求めよ。

(3) この箱を周期  $T_0$ 、振幅  $A$  で左右に周期的に揺らすとする。この場合のラグランジアンおよび運動方程式を求めよ。

3. 右下図のように、重さの無視できる長さ  $l$  の棒の先に質量  $m$  の球をつなぎ、もう一方の端を固定して揺れるようにする。ただし、ここでは鉛直下向きの重力加速度  $g$  は一定とする。

(a) 垂直方向から計った棒の角度を  $\phi$  として、この座標でのラグランジアンを求めよ。

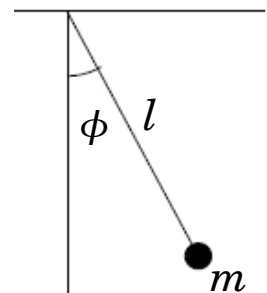
(b) ラグランジュの運動方程式を求めよ。

(c) この時の全エネルギーを  $\phi$  の関数として表せ。

(d) 振り子の最大の傾きの角度を  $\phi_0$  として、全エネルギーを示せ。

(e) この運動の角運動量ベクトルの各成分を求めよ。また、それぞれの成分は保存しているか?

(f) (c) より振り子の周期  $T$  を、 $\phi$  に関する積分で表せ。



裏にも問題がある

4. 地球の全質量を  $M$ , 半径を  $a$  (6400km とする), 万有引力定数を  $G$  とする. 地球の外側 (半径  $r$  の所を考えると,  $r \geq a$ ) では中心に質点  $M$  があつた場合の重力場と同じとして, 以下の問いに答えよ.

(a) 地表面での重力値  $g_0$  とポテンシャル  $U_0 = U(a)$  を求めよ. ただし,  $U(r) \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$  とする.

(b) 地表面から高さ  $h$  の点の重力値  $g_1$  とポテンシャル  $U_1$  を求めよ.

(c) (a) と (b) の差, すなわち,  $\Delta g \equiv g_1 - g_0, \Delta U \equiv U_1 - U_0$  を求めよ. さらに,  $h/a \ll 1$  として 2 つの値の近似式を求めよ. (ヒント:  $f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 f''(x_0) + \dots$  ただし  $\epsilon \ll 1$ )

(d) この問題では便宜上,  $g_0 = 1000 \text{ cm/s}^2$  とする. (c) の結果を用いて, 高さ 1km の塔 (アラブ首長国連邦のドバイではこんなものを建てようとしているが, 金融危機で途中で打ち切りとのうわさも!) の上では地表面に比べて重力値はどれだけ大きいか, 小さいかを有効数字 2 桁で答えよ. (これは地球科学では重力のフリーエア補正と呼ぶ)

Merry Christmas



謹賀新年

建設中のドバイタワー