地球惑星科学のための古典力学　第1回小テスト(10点満点)試験時間15分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題1 関数 $y(t)=r\sin\theta$ および $z(t)=r\cos\theta$ の時間による微分 （ $\dot{y}=dy/dt$, $\dot{z}=dz/dt$ ）を求めよ．ただし、r と θ はどちらも時間に依存する，つまり $r(t),\theta(t)$ とする。

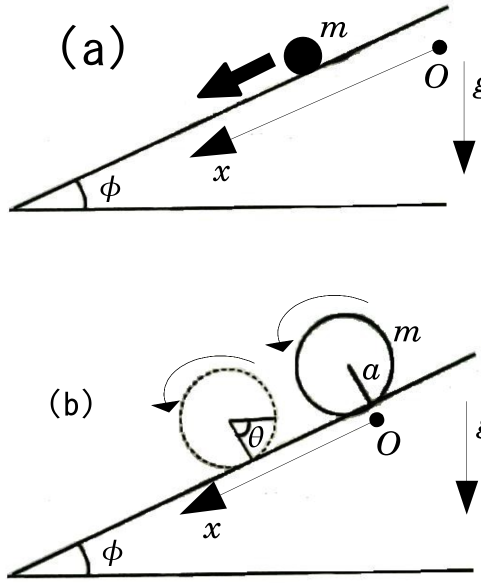
問題2 任意ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ について、$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0$ となることを示せ。
ただし、$\boldsymbol{\nabla}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$ である。（$\hat{\boldsymbol{x}}$等は$\boldsymbol{x}$方向の単位ベクトル）

地球惑星科学のための古典力学　第2回小テスト（10点満点）試験時間10分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題1 半径aの円周上のみを運動する質量mの質点の運動エネルギーはどのように表されるか(例えば、室伏が回しているハンマーを想像せよ)。またそのポテンシャルエネルギーは質点の位置のみによるとすると、どう表されるか（注意：重力などの力の場ではない)。これより、ラグランジュ方程式より、この質点の運動方程式を求めよ。
（ヒント：極座標(r,θ)を用いて、質点の運動を表す）

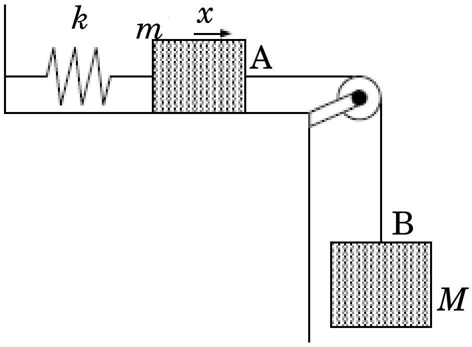
地球惑星科学のための古典力学　第3回小テスト（15 点満点）試験時間 15 分
学生番号　　　　　　　　　　　　　氏名

問題　重力加速度gの下で角度ϕの斜面を(a)摩擦なしですべり落ちる質点，および(b)半径aで全質量がMの円形のループ(輪)がすべりがなく転がる場合の落下運動についてラグランジュの方程式を求めよ(図参照).
ヒント：斜面に沿って移動する長さxを座標のひとつとする.(b)については，運動エネルギーは慣性中心の並進運動と円の中心に対しての運動の和とすればよい.後者は回転角をθとすると，すべらずに転がるので，$dx=ad\theta$となっている.またポテンシャルエネルギーについては，慣性中心の並進運動のみについて考えればよい.



地球惑星科学のための古典力学　第4回小テスト（10点満点）試験時間15分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題　図のように、質量m、Mの二つの物体A及びBとバネをつないだ場合を考えよう。このとき、AとBは長さの変わらないヒモでつながっていて、すべての摩擦はないものとする。バネが自然長のときのAの位置を$x=0$として、このときのBの高さをポテンシャルの基準（$V=0$）とする。また重力加速度をgとする。



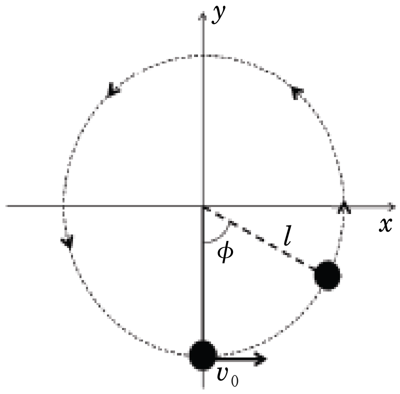
（a）この系のラグランジアンを求めよ。

(b) Aの水平移動（x）に関して運動方程式を求めよ。

（c）時間$t=0$での初期条件として、位置$x(0)=0$及び速度$\dot{x}(0)=0$が与えられたとき、（b）の運動方程式を解き、xを求めよ。

地球惑星科学のための古典力学　第5回小テスト（10 点満点）試験時間 15 分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 長さlの棒に質量mのおもりをつけた単振子の運動を考える．ここでは，鉛直上向きにy軸をとり，振子の最下点をポテンシャルエネルギーの基準とする．また，最下点から反時計周りに測った振子の角度をϕとする．



(a) おもりが最下点（$\phi=0$）にいるとき，振子の接線方向に初速v_0を与える．おもりの接線方向の速さをvとして，このおもりが回転運動を続けるために必要な初速v_0の条件を示せ．（ヒント：エネルギー保存則と，最上点($\phi=\pi$)における速さvの条件を考える．）

(b) この運動のラグランジアンLを，ϕの関数として求め，またこの運動方程式を求めよ．このとき，ϕは循環座標であるかどうか，また，この運動において角運動量が保存するか．（角運動量はこの紙に直角方向の成分しかないので，この成分のみを議論すればよいことに注意）

地球惑星科学のための古典力学　第 6 回小テスト（10 点満点）試験時間 15 分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題　長さ l の軽い棒に吊された質量 m の質点の運動（単振子）を考える。(図 1)

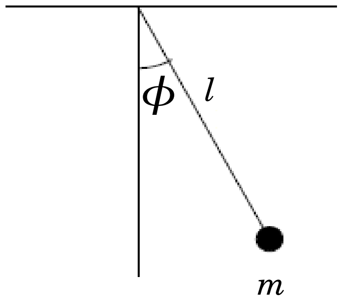


図 1:

(a) この時の全エネルギーを ϕ の関数として表せ。

(b) 振り子の最大の傾きの角度を ϕ_0 として、全エネルギーを示せ。

(c) 振り子の周期 T を、ϕ に関する積分で表せ。

(d) 前問の結果より、振り子の周期 T の近似解を求めよ。
(ヒント： $|\phi| \ll 1$)

地球惑星科学のための古典力学　第７回小テスト（15 点満点）試験時間 10 分

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題

(a) 円柱座標系($x=r\cos\phi, y=r\sin\phi, z$)における質量 m の質点の運動エネルギーを表せ。

(b) この質点の角運動量の z 成分 M_z を直交座標と円柱座標でそれぞれ表せ。

(c) ポテンシャルエネルギーは位置のみによるとして、(a)と(b)を比較することで M_z はラグランジアン L のある変数について偏微分になっていることを示せ。（この結果は z 軸に限らず角運動量の任意の成分についても成立するので重要である）

(d) 重力場のような z 軸の方向を向いた一様座標では M_z が保存するが、それはこのポテンシャルエネルギーがどのような形であるためか。（ヒント：循環座標）

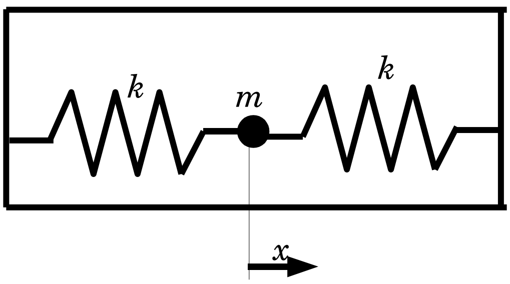
地球惑星科学のための古典力学　第８回小テスト（10点満点）試験時間15分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 講義では万有引力のような$U(r)\propto\frac{1}{r}$のポテンシャルという中心力での運動を論じた．
軌道が閉じるもう一つの$U(r)=\frac{k}{2}r^2\ (k>0)$のポテンシャルについての運動を考える．

（a）この場合の平面内での運動の(r,ϕ)におけるラグランジアンを求めよ．
（b）rとϕのそれぞれについての運動方程式を求め，ある角運動量成分Mが保存していることを示せ．
（c）Eの形を求めよ．また(b) の結果より，$\dot{\phi}(=d\phi/dt)$を消去した形を示せ．
（d）（c)の結果で，$\dot{r}(=dr/dt)$を含まない項を有効ポテンシャル$U_{eff}(r)$と呼ぶ．この$U_{eff}(r)$のrとの関係を模式的に図示せよ．（ヒント：まず$r\to0$と$r\to\infty$の場合の値を求める．次に極値があるか調べる．）
（e）（d）の図からEの値によってとりうる運動の範囲を示し，どのような運動か考えよ．

地球惑星科学のための古典力学　第９回小テスト（10点満点）試験時間10分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 箱の中で２本のばね（ばね定数 k）で図のように質量 m の質点を左右から引っぱっているとする．運動はばねの長さ方向（x とする）のみとする．摩擦はないとする．



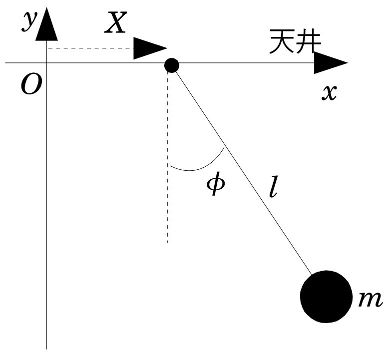
（1）この質点のラグランジアンを求めよ．

（2）この質点の運動方程式を求め，それが単振動であることを示し，その周期を求めよ．

（3）もし右側のばねが k, 左側が $2k$ の場合について, (1) と (2) の解をそれぞれ求め, 周期などを比較せよ.

地球惑星科学のための古典力学　第10回小テスト（15点満点）試験時間15分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 図のように，天井からつるされた振子（質量 m，長さ l）を考え，その支点が水平（x 軸方向）に振動する場合について考える．（例えば，電車のつり輪など．）ただし，振子の支点に質量はなく摩擦も無視できるものとし，天井をポテンシャルの基準とする．



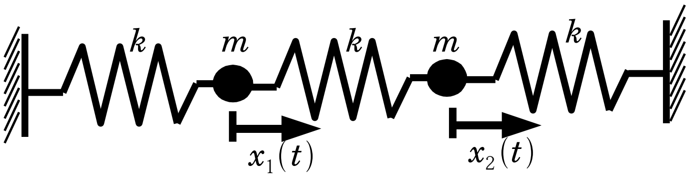
（a）座標原点から支点までの距離を X，鉛直方向から振子の角度を ϕ，重力加速度を g として，この系のラグランジアンを X 及び ϕ を用いて求めよ．

（b）ϕ についての運動方程式を求めよ．ただし，$\omega_0=\sqrt{g/l}$ とする．

（c）振子の支点が x 軸上で $X=X_0\cos\omega t$ の振動を行い，また振子が微小振動をする場合（$\sin\phi\approx\phi, \cos\phi\approx 1$）の運動方程式を求めよ．（強制振動の方程式となる）

地球惑星科学のための古典力学　第11回小テスト（15点満点）試験時間15分
学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 右図のように一方向（x軸とする）のみに振動する質量mのおもり2つとばね定数kの3つのばねを考える．両側は壁に固定されている．左のおもりの変位を$x_1(t)$, 右のそれを$x_2(t)$とする．



（1） $x_1(t)$と$x_2(t)$によってこの系のラグランジアンを求めよ．（ヒント：真ん中のばねのポテンシャルエネルギーは$x_1(t)$と$x_2(t)$の差によるので, $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$である.）

（2） x_1とx_2についてのラグランジュ方程式を求めよ．（2つの連立の微分方程式になる）

（3） $x_1=A_1\cos(\omega t+\phi), x_2=A_2\cos(\omega t+\phi)$と解を仮定して, (2) の方程式に代入して, $A_1=A_2=0$でない解である2つの基準振動の角周波数ω^2を求めよ.

(4) (3) のそれぞれのω^2の解について, A_1とA_2の関係を求め, それぞれの振動の様子を簡単に図示せよ.

地球惑星科学のための古典力学　第12回小テスト（15点満点）試験時間15分

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 長さlで質量mの質点の単振子を考えよ．（振幅は有限とし，重力加速度gは一定とする．鉛直からの角度をθとする.）

（a）この単振子のハミルトニアンを求め，正準方程式を導け．この方程式がニュートンの運動方程式と一致することを確かめよ．

（b）全エネルギーEが保存することを示し，その値を求めよ．

（c）$q=\theta, p=p_\theta$として(q, p)という位相空間での様子を調べよ．（ヒント:Eの値ごとの軌跡を模式的に描く．特に，閉じた軌跡とそうでない軌跡を区別するEの値を示し，それがどのような意味があるかを説明すること）

地球惑星科学のための古典力学　第13回小テスト　試験時間15分

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 ケプラー運動のような平面内で引力によるポテンシャル $U(r) = -\alpha / r\ (\alpha > 0)$ の場での質量 m の質点の運動を極座標 (r, θ) で考える.

(a) この運動のラグランジアンを求めよ. 一般運動量 p_r, p_θ はどうなるか?

(b) この運動のハミルトニアンを求めよ. このハミルトニアンは保存し, それはエネルギー E となることを示せ.

(c) この運動の正準方程式を求めよ.

(d) この運動のハミルトン・ヤコビ方程式を求めよ. (時間 t によらないことに注意).