第１章　応力とひずみ

質点の運動方程式は、ベクトル形式の変数や関数で表現される。例えば、バネ定数 k のバネの先についた質量 m の質点の i 成分の位置を $x_i(t)$ とすると（ばねが釣り合っている位置を原点とする）、この質点にかかる力は、x_i に比例して $f_i = -kx_i$ なので (フックの法則と呼ぶ)、

$$(i = 1, 2, 3 \text{ or } x, y, z) \tag{1.1}$$

が運動方程式となり、$x_i(t)$ についての解は単振動を表わす。地球の物質は、固体部分でも海洋でも大気でも、質点ではなく連続体（continuum medium）と呼ばれている形状を扱う。成分という一つの添字のあるベクトル表示だった上のような運動方程式は、流体（気体や液体）や弾性体（固体）では、２つの添字がある応力と歪み（ひずみ）テンソルという量によって表現される。地球の物質は固体でも長い時間では「流れる」ような複雑な挙動をするが、それでもこの応力と歪みのテンソル表現で統一的に説明できる。

1.1　応力テンソル Stress Tensor

連続体である媒質 (medium、複数形は media、しばらくは固体とするが、流体や気体でも多くの概念は適用できる) にかかる力を考える。質点の力学では外力は、方向と大きさを表すベクトル $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$、または f_i $(i = x, y, z)$ の形を取る。連続体にかかる力の場合、もし有限な大きさを持っているならば、その外側の面上のある点にかかる力の他に、その内部にある点にかかる力も考えなくてはならない。

簡単な直方体の棒を考える（図１－１ (a)）。その両端に面に直角外向きに外力 F をかける（断面積を S とする）。片面に F の外力をかけるには、反対の面に逆向きで同じ F がかからないとつりあわない。質点（または質点系、さらに剛体でも）の力学では「力」（単位はニュートン、N など）が基本となるが、連続体においては面の大きさも関係してくるので、「単位面積あたりにかかる力」が本質的となる。日常生活で馴染みのある「圧力」（単位の Pa（パスカル）は $\mathrm{N/m^2}$）はこの種の物理量であり、これをより一般的に拡張したものが応力テンソルである。

図1-1

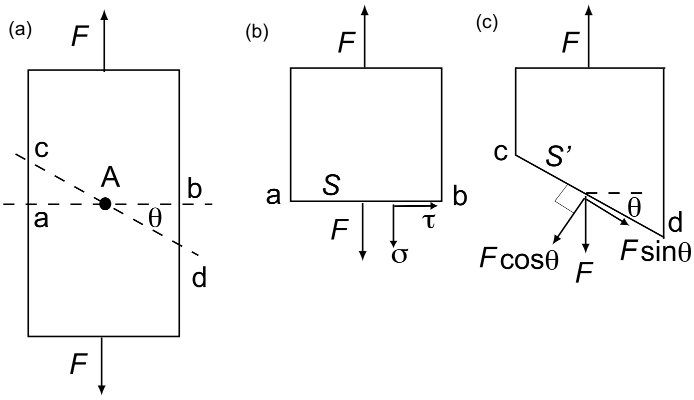


図１－１ (a) のつりあいの状態の場合に媒質内部のある点 A にかかる力はどうなるか。内部の点なので、点 A を含む仮想的な断面を考える必要がある。しかし、この断面は唯一のものはなく、任意の方向に選ぶことができる。例えば、外側の面と平行な a-b という点 A を含む断面をまず考える（図１－１ (b)）。この断面積は外側と同じ S であり、面全体にかかる力は外側の面と同じくこの面に直角外向きに F である。ここで、面に垂直な方向にかかる成分 σ と、面に沿っての成分 τ を区別する。この場合には、

$$\tau = 0, \quad \sigma = F/S \equiv \sigma_0 \tag{1.2}$$

となる。一方、角度 θ だけ傾いた面 c-d の場合には（図１－１ (c)）、面にかかる力 F の大きさと方向は変

わらないが、面の方向と断面積が異なっている。この面の断面積は $S' = S/\cos\theta$ より、それぞれの成分は

(1.3)

(1.4)

となる。すなわち、連続体にかかる力は、考えている点の場所の位置（位置を示す座標ベクトル）だけでは不十分で、その点の「面の方向」も指定しないと、定義できないことがわかる。つまり、これまでの質点系などの力学では「力の方向」という添字が一つのベクトルだったのに対して、連続体の力は以下の２つの大きな異なった特徴がある：

1. 単位は、単位面積あたりの力、すなわち、　など。
2. かかっている力の方向の成分に加えて、　）という２つの独立な成分が必要となる。

力のベクトル F_i に対して、２つの成分を含むため、σ_{ij} といった形式の表現が必要となる。ここで、i, j は x, y, z あるいは $1, 2, 3$ となる。これは２階のテンソル（tensor of the second rank）と呼ばれる（添字が n 個付いたものを「n 階のテンソル」と呼ぶ）。２つの成分がある量としては行列（matrix）が知られる。数学的には厳密には違うが、本講義で扱う範囲では同じと見なしても構わない。

連続体の外側の面あるいは内部にかかる上のような力は、応力テンソル（stress tensor）と呼ばれる。図１－２ (a) のように、x 軸に垂直な面 ($\hat{\mathbf{x}}$ は x 方向の単位ベクトル) にかかる単位面積あたりの力を $\mathbf{t}$ というベクトル（これを traction と呼ぶ）として、$\mathbf{t}$ の各成分を２つの添字を付けて以下のように定義する：

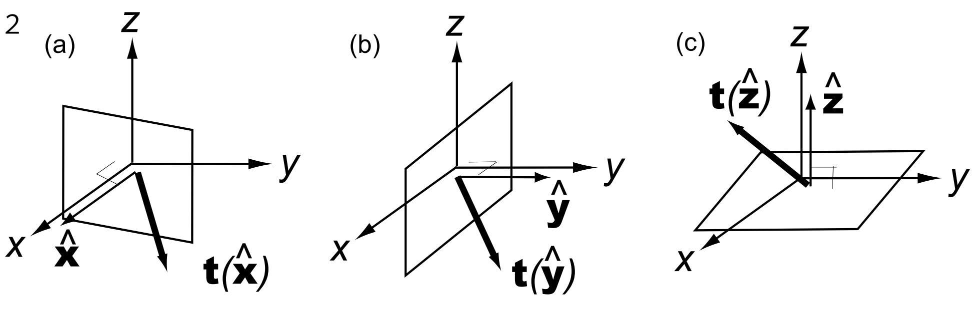
$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{x}}) = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}) \tag{1.5}$$

つまり、σ_{ij} として、最初の添字 i は考えている面の法線方向を示し、２番目の添字は力のベクトルの成分を示す。同様にして、y 軸（図１－２ (b)）および z 軸（図１－２ (c)）に垂直な面に対してかかっている単位面積あたりの力のベクトルについて、以下のように各成分を定義する：

(1.6)

(1.7)

図１-２



こうして合計９つの成分を応力テンソルは持つ。行列形式で表現すると、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

となる。すぐ後で示すように、このテンソルは対称（$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$）なので、独立な成分は実は６つとなる（２次元問題では 2×2 行列で、独立な成分は３つ）。

[**問題１-１**] ある面にかかる traction は外向きを正とする。では、その面の裏側の traction は符号が逆、すなわち、ある面の法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ の traction を $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$ として、$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(-\hat{\mathbf{n}})$ を示せ。

[**問題１-２**] 問題１－１と同様にして、ある面と反対側にかかる traction のつりあいから、応力テンソルの添字の符号の反転、すなわち $\sigma_{ij} = \sigma_{-i-j}$ を示せ。同様に、$\sigma_{ij} = -\sigma_{-ij} = -\sigma_{i-j}$ を示せ。

応力テンソル σ_{ij} の物理的意味の理解は重要である。i は面の方向を、j は力の方向を示すので、$i = j$ の成分（行列形式では対角成分）は図１－１の σ のような面に対して直角な力になる。外向きが正として定義したので、正ならば「引っ張り（extension)」、負ならば「圧縮（compression)」を表す。一方、$i \neq j$ の成分（非対角成分）は面に沿っての力となる。水や空気のようなこれまで学んで来た液体や気体ではこのような力はかからず、固体や粘性のある流体に限って存在する。初等の力学の問題としては、傾斜した面を落下する物体の底にかかる摩擦力などが対応する（傾斜面に沿って上向きな力となっている)。このような面に沿った力の成分を「せん断（shear)」と呼ぶ。これまでの流体についての力として「圧力（pressure)」p は馴染みがあるが、これは $i = j$ の成分であり、さらに３方向の平均と考えられる。また、圧力は考えている流体のある面を圧縮する力を正とするので、応力テンソルとは符号が逆となって以下の関係にある：

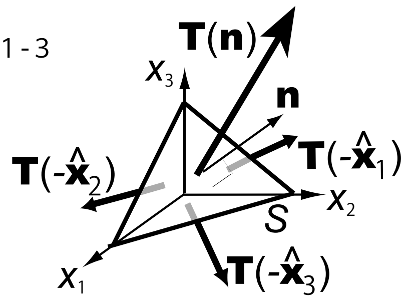
(1.9)

上の応力テンソルの各成分は、例えば x 軸に垂直といった面の指定が必要だった。そこで、任意の方向の面（法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする）についての traction $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ を σ_{ij} でどう表現できるか考える。図１－３のような任意の方向 $\mathbf{n}$ の面と各座標軸に垂直な３つの面で囲まれた原点を含む四面体を考える。(最終的には各辺は無限小の極限をとるような) 微小な四面体を想定する。ここにかかる力は、（１）４つの面にかかるそれぞれの traction(面積を S、S_1 などとする) と、（２）重力やクーロン力のような四面体の質量（つまり密度 ρ と体積 V の積）に比例する体積力 $\mathbf{f}$ である。４つの traction にはそれぞれの面積との積を取れば、四面体にかかる力となる。この四面体の変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とすると、ニュートンの運動方程式 (質量 $\times$ 加速度 $=$ 力) は以下のようになる：

$$\rho V \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{T}(\mathbf{n})S + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_1)S_1 + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_2)S_2 + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{x}}_3)S_3 + \rho V\mathbf{f} \tag{1.10}$$

ここで、traction, $\mathbf{T}$ について四面体の外向きの面の力として考えるので、各座標軸方向の単位ベクトル $(\hat{\mathbf{x}}_1,\ \hat{\mathbf{x}}_2,\ \hat{\mathbf{x}}_3)$ は面の方向の定義からマイナスの符号が付くことに注意。

図１-３



[**問題１-３**] 図１－３において、考えている面の法線ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は、その面積 S と他の三つの面積 S_1, S_2, S_3 と、$n_i = S_i/S$（$i = 1, 2, 3$）の関係があることを示せ。

問題１－１と問題１－３の結果を用い、さらに四面体を無限小にしていくと、体積 V の方が面積 S よりも速くゼロに収束する ($V \propto L^3$, $S \propto L$ で長さ $L \to 0$) ので、V が付く項は消えて上の式は以下のようになる：

$$\rho \frac{V}{S}\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{T}(\mathbf{n}) - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_1)\frac{S_1}{S} - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_2)\frac{S_2}{S} - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_3)\frac{S_3}{S} + \rho\frac{V}{S}\mathbf{f} \quad (V/S \to 0)$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_1)n_1 + \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_2)n_2 + \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_3)n_3 \tag{1.11}$$

例えば、traction の 3 成分のうちの x_1（つまり、x）成分を表すと、

$$T_1(\mathbf{n}) = T_1(\hat{\mathbf{x}}_1)n_1 + T_1(\hat{\mathbf{x}}_2)n_2 + T_1(\hat{\mathbf{x}}_3)n_3$$

ここで、$T_1(\hat{\mathbf{x}}_1) = \sigma_{11} = \sigma_{xx}$ のように応力テンソルの元来の定義 (式 (1.5)-(1.7)) を用いれば、

となる。同様に、他の２成分も

$$T_2(\mathbf{n}) = T_2(\hat{\mathbf{x}}_1)n_1 + T_2(\hat{\mathbf{x}}_2)n_2 + T_2(\hat{\mathbf{x}}_3)n_3 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3$$

$$T_3(\mathbf{n}) = T_3(\hat{\mathbf{x}}_1)n_1 + T_3(\hat{\mathbf{x}}_2)n_2 + T_3(\hat{\mathbf{x}}_3)n_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3$$

のようになる。応力テンソル σ_{ij} の添字を対応させると、以下のような簡単な関係が求められる：

(1.12)

これが任意の面（法線単位ベクトル $\mathbf{n}$ で定義）にかかる traction と応力テンソルの成分との関係となる。なお、応力テンソルのように一般にテンソルを扱う場合には、添字を繰り返しての和を取る表現が多い。和を示す Σ をいちいち記さずに、「添字が繰り返される」ということで「その添字については全成分の和を取る」と定義することが、慣例となっている。式 (1.12) の場合には添字 j をくり返しての和なので

(1.13)

ここで添字 i については繰り返していないので、和は取らないことに注意。（相対性理論ではテンソル表現が基本となる。この理論の基礎を作った Albert Einstein が和を省略する上記の記載法を使ったので、今ではこの表現をアインシュタイン和（Einstein sum）と呼ぶ。）他の例としては、先にあげた圧力と応力テンソルの関係 (1.9) は

あるいは、Kronecker のデルタ（$\delta_{ij} = 1\ (i = j), = 0\ (i \neq j)$ と定義する）を用いると、

$$p = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}$$

とした方が、より明確となる。

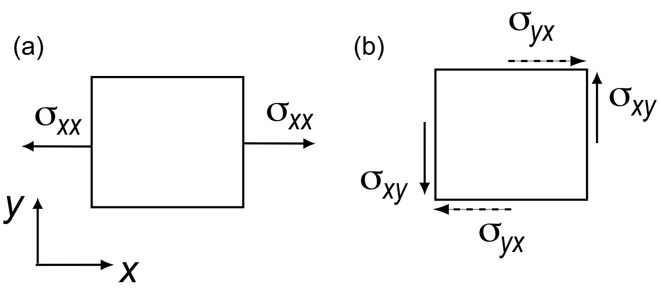
応力テンソルで重要な性質の一つは、対称性である：

(1.14)

一般的な証明は参考書に譲り、図１－４のような xy 平面内の２次元の微小な媒質（z 方向には一様、すなわち無限に延びているとする）の面にかかる応力においてのみ説明する。問題１－２で示したように、対角成分、すなわち面に直角な引っ張り・圧縮に関する力は、２つの相対する面において逆向きの力がかかることで釣り合いが取れる。例えば、図１－４ (a) の右側の面（x が正の面）に正の力、つまり外側に σ_{xx} の引っ張りの力があるならば、左側の面（x が負の面）に負の方向に同じ大きさの力、つまり外側向きにやはり $\sigma_{-x-x} = \sigma_{xx}$ がかかることで、つりあいが取れる。σ_{yy} についても同様である。

では、非対角成分 $(i{\neq}j)$ はどうなるか。例えば、図１－４ (b) のように σ_{xy} は面が x で力の成分が y なので、右側の面（x が正）で上方向（y が正）への力を示す。これと同じ $\sigma_{-x-y} = \sigma_{xy}$ は、左側の面に下向

図１-４



きに同じ大きさの力がかかることで、つりありが取れている。しかし、もしこの２つの力だけがかかるとすれば、力のつりあいは取れるが、微小の媒質の中心に対してトルク（力と距離の積）は反時計周りのみの成分となり、どんどん反時計周りの回転をしてしまう。回転を止めるためにこれとつりあう時計回りのトルクをかけるには、点線の矢印のような２つの力（片方だけでは x 方向への力がつりあわない）があればよいことがわかる。これらは y 方向に直角な面であり、力は x 方向なので、σ_{yx} と $\sigma_{-y-x} = \sigma_{yx}$ に対応する。この２組の力の大きさが等しくないと、全体でトルクが働き、回転してしまうので、トルクのつりあいのためには以下の関係が成立する：

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

つまり、応力テンソルの２つの添字は交換しても値は変わらない。他の成分についても同様な関係があるので、最初に言及したように、「応力テンソルは対称（symmetric）」である。力のつりあいに対しては問題１－２のような添字の符号を変えた場合の関係になっている。一方、上の対称性は回転やトルクのつりあいに関係している。つまり、力学では「角運動量保存則」が応力テンソルの対称性に対応する。

[**問題１-４**] ある場所の水平面内の応力テンソルは以下とする（以下、２次元問題とする）：

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & -10 \\ -10 & -60 \end{pmatrix} \mathrm{MPa}$$

ここで、x は東、y は北に取る（地球惑星科学では通常はこのように考える）。
(a) x 方向から時計回りに 45 度の走行の鉛直な断層面を考える。つまり、地表を横切る断層は、北西ー南東方向を向く。この断層面に対する、traction の２成分（式 (1.13) の T_x, T_y）を求めよ。
(b) (a) の traction というベクトル $\mathbf{T}$ から、この断層面に対しての接線方向（つまり、せん断応力）と法線方向の各成分を求めよ（図１－１の τ, σ に当たる）。また、求めた結果から、この断層面にはどのような様式の応力がかかっているのか、簡単に説明せよ。

[**問題１-５**] 地球科学における問題では、境界条件の設定が非常に重要である。つまり、地表面や境界面（例えば、核・マントル境界）での変位や traction や応力テンソルの成分がどう制約されているかである。以下の境界面における応力テンソルのうち、規定できる成分はどれか。そして、その力はどのような値となるか。ただし、境界面は z 軸に垂直とする（つまり、鉛直方向を z 軸とした水平面を考える）。
(a) 地表面、(b) モホ面（固体と固体の境界面）、(c) 核・マントル境界（固体と液体）

1.2　歪み（ひずみ）テンソル Strain Tensor

ばねにつないだ質点の運動方程式 $md^2x_i/dt^2 = f_i = -kx_i$ に対して、連続体の運動方程式を求めるに当たって、右辺の力の項が応力テンソル σ_{ij} の形を取ることを前節では示した。では左辺の加速度ベクトルの項はどのようになるか。(なお、バネについた質点がフックの法則 $f_i = -kx_i$ という変位と力が比例するのは、「微小変形」の場合に限られる。以下でもすべて変形は微少である（infinitesimal deformation）を仮定

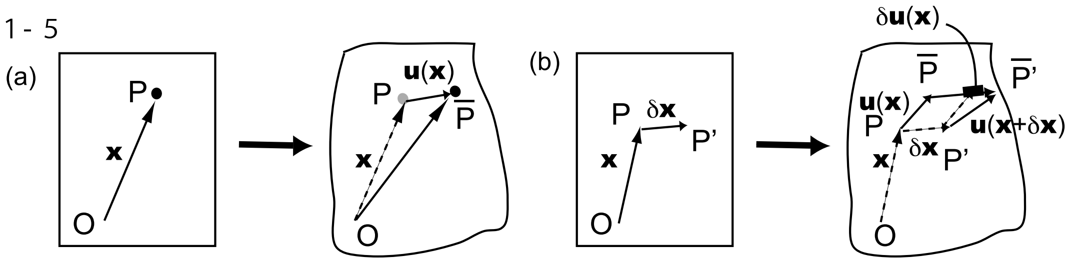
する。実際の地球惑星科学のほとんどの問題はこの仮定が正しいことを、後のいくつかの例では具体的な数字で示す。)

質点の運動方程式に現れる x_i は位置または変位ベクトルであった。連続体が図１－５ (a) のように変形した場合に、ある点 P が変形前と後で

(1.15)

のように位置 $\bar{\mathrm{P}}$ に動くとする。(こんにゃく、またはゼリーの内部に黒いシミがあり、変形するとこのシミがどのように動くかを想像せよ。）このベクトル $\mathbf{u}$ は元の位置ベクトル $\mathbf{x}$ の関数であり、変位ベクトル (displacement vector）と呼ばれる。しかし、$\mathbf{u}$ が有限であっても、全体が平行移動したり剛体回転をするようならば、この連続体の変形に伴う力は全くかからないことになる。つまり、応力は生じない。

図１- 5



応力を生じる変形はこのように一点の変位 $\mathbf{u}$ を考えるだけでは不十分で、「隣接する２点の相対的な位置の変化」が本質的となる。図１－５ (b) のように、位置 $\mathbf{x}$ の点 P と微少量の $\delta\mathbf{x}$ だけ離れた $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$ の点 P' の２点を考える。連続体が変形した後に点 P は (a) と同じく、点 $\bar{\mathrm{P}}$ の $\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x})$ へ動くのに対して、点 P' は

(1.16)

と $\bar{\mathrm{P}}'$ へ移る。ここで重要なのは、２点の相対位置ベクトルの変更前と後の差、すなわち $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ である。ここで $|\delta\mathbf{x}| \ll 1$ と仮定したので、$\delta\mathbf{u}$ はその定義から、テイラー展開により以下のようになる：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_3}\delta x_3 + \cdots$$

$$\longrightarrow \qquad (1.17)$$

または、テンソル形式の添字の表現では

(1.18)

となる。最後の定義のように、Einstein 和と同様に、空間での偏微分を添字のカンマで省略形として示すこともテンソル表現では慣例となっている。

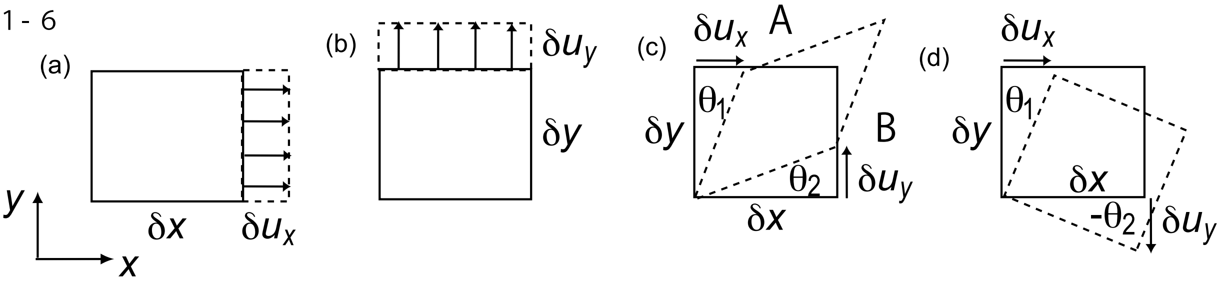
δx_j は点 P と点 P' の変形前の位置の差のベクトルを示すので、相対的な変位である δu_i は当然これに比例する。よって、変形の大きさを示す本質的な量は、この２つの関係の比例定数としての $\partial u_i/\partial x_j$ という量である。この量は i と j という２つの添字があるので、$3\times3=9$ 成分があるように見える。しかし、以下の示すように、$u_{i,j}$ の各成分の物理的な意味を考えると、このうち３成分は変形を伴わない剛体回転に対応する。よって、$u_{i,j}$ ではなく、少し工夫を加えた量を用いて、真に変形に寄与する形式を以下に導く。

$u_{i,j}$ の各成分の物理的な意味は、ここでは簡単のために $x-y$ 平面内のみの２次元問題で考える。そこで定義される $u_{x,x}$, $u_{y,y}$, $u_{x,y}$, $u_{y,x}$ の４つの成分について、図１－６のように考える。$u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$ は、図１－５で示したように、x_j 軸方向に少し離れた２点が変形後に x_i 軸方向に変形の差が生じたことを表わす。よって、$\partial u_x/\partial x$ は図１－６ (a) のように、x 軸方向に純粋な「引っ張り」(符号が負の場合には「圧縮」）を表わす：

$$\delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x$$

正確には、x 軸方向の「一軸引っ張り・圧縮」(uniaxial extension or compression) と呼ぶ。$\partial u_y/\partial y$ も図1－6 (b) のように、同様に y 軸方向の一軸引っ張り・圧縮を表わす。

図1-6



では、２つの添字が異なる $\partial u_x/\partial y$ はどうなるか。これは y 方向に δy と少しだけずれた２点が、変形後には x 方向に δu_x だけ相対的にずれる量を示している。よって、図1－6 (c) の点 A のように横にずらしたような（面に垂直な方向にはなく、面に沿ってのみの）変形となる：

$$\delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y \equiv \theta_1 \delta y$$

のように、$u_{x,y}$ は正だと時計回りの微小角度 θ_1 に対応する。同様に、添字が反対の $\partial u_y/\partial x$ は図1－6 (c) の点 B のように x 方向に少しずれた２点の y 方向への変位の差を示す。よって、

$$\delta u_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x \equiv \theta_2 \delta x$$

のように、正だと反時計回りの θ_2 に対応する。

$u_{i,j}$ の２つの添字 i と j が異なっているが交換している $u_{x,y}$ と $u_{y,x}$ の２つの量が共に正の場合には、図1－6 (c) にあるように時計回りの θ_1 と反時計回りの θ_2 となるので、同じような変形を結果的に示すことがわかる。どちらも負である場合も同様である。よって、図1－6 (c) のような変形は平均として

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.19}$$

という値を取るのが自然である。

これに対して、この２つの符号が異なった場合はどうなるか。さらに絶対値が同じ場合について、図1－6 (d) に示す、つまり、$\theta_1 = -\theta_2 > 0$ とした。すると、どちらも時計回りに同じ角度だけ変形したことになり、結果的に「変形をしない剛体回転」の様式となる。全体の回転する平均の角度は

$$\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.20}$$

となる。つまり、２つの添字が異なる２成分についての和はある種の変形（流体にはなく固体に特有な変形様式であり、「せん断」(shear) と呼ぶ）を表わすの対して、差は変形に関わらない剛体回転を表わす。

先に示した変形の量である δu_i と元の２点の位置関係を示す δx_j との関係式は, 上のような変形様式の意味を考慮すると、$u_{i,j}$ そのままの形式ではなく、その和と差に分離した形式にすべきである：

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta x_j \tag{1.21}$$

ここで右辺の第１項の和は対称であるのに対して、第２項の差は反対称（添字を入れ替えると符号が逆になる）である。上の関係を行列形式で３成分をすべて書き出すと、以下のようになる：

(1.22)

流体運動では渦のような剛体回転である後者の行列要素も重要であるが、真に変形に関係する量は、前者の行列要素のみである。前者の各要素は応力テンソルと同じく２つの添字で示されるので「歪みテンソル」（strain tensor）と呼び、以下のように定義する：

(1.23)

（1/2 が抜けている値を e_{ij} と定義している本などもまれにあるので注意。）その定義から応力テンソルと同じく対称（$e_{ij} = e_{ji}$）であり、独立な６成分からなる。対角成分 $i = j$ は引っ張り（正）・圧縮（負）を示し、非対角成分 $i \neq j$ はせん断を示す。後者の剛体回転に対応する３つの独立な要素は、ベクトル解析の回転、rot, curl となっている。つまり、回転ベクトルといった様式に対応する。

$$\omega \equiv \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} \qquad \text{or} \quad \omega_k = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u})_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.24}$$

e_{ij} と ω_k の２つを合わせると、$u_{i,j}$ が９成分あったのと整合的である。

歪みテンソルは分子が変位、分母が隣接する２点の距離なので、無次元量である。大きさが 0.01 であれば、１パーセントの変形に対応する。ここでは微小量と仮定してきたが、例えば通常の地震波に伴う歪みの大きさは、$10^{-9} \sim 10^{-12}$ 程度であり、十分に微小であることがわかる。

[問題１-６] 体積 V の物体が微小変形して $V + \delta V$ となるとすると、その増加率（δV が負なら減少率）は歪みテンソルの対角成分の和であることを示せ：

(1.25)

[問題１-７] 2000 年の有珠山の噴火では西山火口群が約 1.5 km ほどの範囲で、最大約 80 m ほど隆起した。この場合の歪みの大きさはどの程度か。

１．３　主応力・主歪み：テンソルの対角化 Principal Stress and Strain

応力テンソル σ_{ij} も歪みテンソル e_{ij} も対称であり、６つの独立な成分が一般には存在する。線形代数で既に学んだように（?!）、このような対称実行列は、以下に示すような性質を持つので、座標軸の回転に対応する座標変換によって、対角化（つまり非対角成分がゼロ）することができる。(数学的には、複素行列の場合には、対称要素が複素共役となる行列（$a_{ij} = a^*_{ji}$）というエルミート行列（Hermite matrix）も同様な性質を持つ。）対角化すると独立な成分は６つから３つと減少するように見えるが、そのようになる座標軸の方向を指定するには３つの角度が必要となるので、結果的には６つの自由度は同じである。この新しい座標軸から見れば、応力テンソルや歪みテンソルは対角成分しかないわけで、あらゆる媒質の応力状態や変形様式は、直交する３方向の純粋な引っ張り（対角要素が正の場合）か圧縮（負）で表現できることを示している。応力テンソルの非対角成分である $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ から、せん断応力がないからである。このような座標軸の選択下での応力などを、主応力（principal stress）や主歪み（principal strain）と呼び、その座標軸を主応力軸や主歪み軸と呼ぶ。線形代数で既に学習した内容のうち、この部分は地球惑星科学では特に重要なので，以下に簡単に復習する。

通常は２次元および３次元の応力や歪みのテンソルを考えればよいので、以下のような３次元の対称行

列 $\mathbf{A}$ とする。そして、これを座標変換によって、対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ に変換する：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

行列の固有ベクトルが互いに直交するという性質を用いることで、この変換は簡単にできる。つまり、対称行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル $\mathbf{e}_i$ とすると、

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.27}$$

において、以下の問題のような性質があることを利用すればよい。

[問題1-8] (a) 対称行列 $\mathbf{A}$ の固有値は、すべて実数であることを示せ。
(b) エルミート行列（$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$、つまり行列要素は転置したものが複素共役である：$a_{ij} = a_{ji}^*$）の固有値も、すべて実数であることを示せ。

[問題1-9] エルミート行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトル（３次元の行列なら３つある）は、固有値が異なれば互いに直交することを示せ。（オプション問題：固有値に重根がある場合にはどのような性質をもつか。）

上の２つの問題から、固有ベクトル $\mathbf{e}_i$ を列に並べた行列 $\mathbf{U}$（行列要素が u_{ij}）

$$\mathbf{U} \equiv (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) \tag{1.28}$$

を定義する。ただし、固有ベクトルは規格化したものとする（各要素の絶対値の二乗の和が１）。

[問題1-10] 行列 $\mathbf{U}$ の逆行列は、転置行列であることことを示せ（つまり、$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$。なお、$\left(\mathbf{U}^T\right)_{ij} = u_{ji}$ を表わす）。（オプション問題：エルミート行列についての行列 $\mathbf{U}$ の逆行列は、自己転置共役（self-adjoint）であることを示せ。つまり、$\mathbf{U}^{-1} = \tilde{\mathbf{U}} \equiv \left(\mathbf{U}^T\right)^*$）。

固有値と固有ベクトルの関係、つまり (1.27) と (1.28) と問題1-１０から、以下のように対称行列 $\mathbf{A}$ は固有値を対角要素とする行列 $\mathbf{\Lambda}$ として対角化できる：

$$\mathbf{AU} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{U\Lambda} \longrightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \mathbf{U}^T\mathbf{AU} \tag{1.29}$$

つまり、行列 $\mathbf{A}$ を対角化すると、その対角要素はその固有値であり、座標変換のための行列 $\mathbf{U}$ はその固有ベクトルを並べたものとなる。そして、固有ベクトル $\mathbf{e}_i$ がそれぞれの固有値（対角行列の各要素）に対応する方向を示すベクトルとなっている。

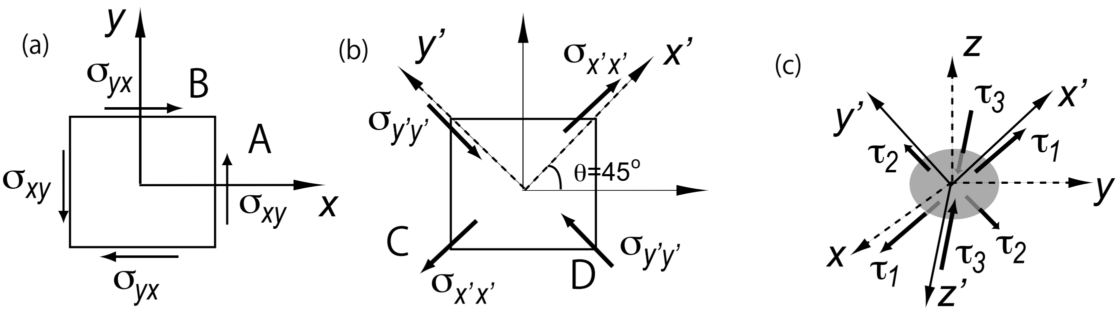
[問題1-１１] 以下の対称行列を対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

以下では、簡単な２次元の例を用いて応力テンソル（歪みテンソルとしても同じ）の対角化とその意味を考える。図１－７ (a) のような「せん断」応力のみの応力テンソルの状態を考える：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}$$

図1-7



つまり、$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=1$ だけがかかる純粋なせん断応力場である（図 $1-7$ (a) の符号 A と B）。しかし、これは設定した $x-y$ 軸に関しての状態であり、実は異なった座標軸では全く様相の異なる応力場となっていることを以下に示す。

行列 $\mathbf{A}$ を対角化するには固有値と固有ベクトルを求めればよい：

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

固有値 λ は行列式を解いて、以下のように２つ求まる：

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-1=0 \quad \longrightarrow \quad \lambda=\pm 1$$

それぞれの固有値に対応する規格化した固有ベクトルは、以下のようになる：

$$\lambda_1=1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ここで、固有ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ は直交することを確かめよ。よって、固有ベクトルから作られた行列 $\mathbf{U}$ は、転置行列が逆行列となる：

$$\mathbf{U}\equiv(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U}^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\mathbf{U}^{-1} \tag{1.30}$$

固有値を対角要素にした対角行列 $\mathbf{\Lambda}$ を導入すると、以下のように行列 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{U}$ という変換する行列によって対角化される：

$$\mathbf{A}\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{\Lambda} \ \longrightarrow \ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} \ \text{ or } \mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T \tag{1.31}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

元の応力テンソル $\mathbf{A}$ は対角要素がゼロで σ_{xy} という非対角要素のみであり、図１－７ (a) で示したように純粋な「せん断応力」であった。ところが、上の座標変換によって行列 $\mathbf{A}$ は $\mathbf{\Lambda}$ のように対角成分のみの行列となるので、直交する「引っ張り応力」（符号が正）と「圧縮応力」（負）だけとなり、せん断応力はなくなる。新しい座標系は変換行列である $\mathbf{U}$ の列ベクトル、すなわち $\mathbf{A}$ の固有ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ が新しい座標軸となる。元の座標系 (x, y) に対して (x', y') を新しい座標系とすると、x' 軸は固有ベクトル $\mathbf{e}_1$ の方向となり、y' 軸は $\mathbf{e}_2$ に対応するので、図１－７ (b) のように新旧の座標系の角度を θ とすると、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

であるので、$\theta = 45°$ であることがわかる。なお、変換行列 $\mathbf{U}$ は

$$\mathbf{U} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

というおなじみの座標回転の行列に対応していることに注意。（３次元の場合には行列 $\mathbf{U}$ は３ｘ３の行列となり、３つの列ベクトルは３つのオイラー角で表現できる。ある軸のまわりの３つの回転操作の足し合わせなので、上の２次元のような回転行列の３つの積といった単なる応用である。線形代数の教科書、あるいはランダウ・リフシッツ「力学」３５節を参照のこと。地球惑星科学では３次元の問題を扱うことが多いので、一度は自分で確認しておくとよい。）図１－７ (b) のように、新しい座標系での応力テンソルに対応する行列 $\mathbf{\Lambda}$ は、$\sigma_{x'x'} = 1$、$\sigma_{y'y'} = -1$、$\sigma_{x'y'} = \sigma_{y'x'} = 0$ となる。つまり、x' 軸方向には引っ張り（図１－７ (b) の符号 C）、y' 軸方向には圧縮（符号 D）の対の力がかかり、せん断の成分はなくなる。図１－７ (a) と (b) の２つの応力状態は同一のものであり、座標の選択によって応力テンソルの成分が $\mathbf{A}$ と $\mathbf{\Lambda}$ のように見かけ上は異なっている、これは図１－１で最初に示した例でも触れた概念と共通する。２つの応力様式は一見矛盾しているようだが、よく考えると同じ応力状態の２つの表現方法であるので、直感的に理解を試みよ（例えば、図１－７のような四角の消しゴムを y' 軸の方向で両側から指ではさみ、(b) のように押し込んでみると、外側の面には実は (a) のような力がかかっていることにも対応する）。

応力テンソルは（歪みテンソルも）対称なので、上で何度も示したように $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}$ と必ず対角成分しかない座標系が存在する。つまりどんな複雑な応力状態でも、３つの直交する「引っ張り」または「圧縮」で表現できることになる（２次元問題ならば２つ）。このような場合の方向を示す座標軸を「主応力軸」（principal axis of stress、複数形は axes）または「主歪み軸」と呼ぶ。慣例的に対角要素の大きいものから順番に並べる、つまり $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ と選択し、それぞれの座標軸 $\mathbf{e}_i$ も設定する。$\mathbf{e}_1$ を最大主応力軸（the maximum principal axis of stress）、$\mathbf{e}_2$ を中間主応力軸、$\mathbf{e}_3$ を最小主応力軸などと呼び、λ_1 を最大主応力などと呼ぶ。図１－７ (c) には３次元の場合の３つの主応力軸と主応力（固有値 λ_i だが、応力であることを明らかにするために大きさの順に τ_1, τ_2, τ_3 と記す）を模式的に示す。歪みの場合も全く同様である。

[問題１-１２] 以下の２次元の応力テンソル場について、対角化をすることで、主応力軸の方向、および２つの主応力の値を求めよ。単位の MPa（メガパスカル）$= 10^6$Pa は地殻や上部マントルの応力を示す程度の値であることにも注意。$\sigma_{xx} = -40$ MPa, $\sigma_{yy} = -60$ MPa, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -10$ MPa.