第４章　粘弾性的性質の物性論的考察

第３章では粘性流体の運動方程式を簡単に論じた。粘性率 η は速度場がゼロでないことで初めて生じるパラメターであることから、散逸過程を示すものであり、エネルギーの供給源がなければ粘性流体の運動エネルギーは時間とともに減少していく。一方で、最初の２つの章では弾性理論における運動方程式などを導入したが、そこではフックの法則である式 (2.10) でわかるように、完全な弾性体、つまりエネルギー散逸がゼロという理想的な場合を仮定した。しかし、実際の地震波などは明らかに減衰があり（でないと、地震が一度起こると、永久に震動が続いてしまう)、このエネルギーや振幅が時間とともに減少する現象を表わす必要がある。短時間のスケールで固体である岩石は、長時間のスケールでは流体のように流れることは良く知られているが（例：地層が褶曲する、マントル対流)、この２面的な挙動はレオロジー（rheology）と呼ばれている。この章ではまず、粘性率や減衰に関する現象を記述するために、現象論的な仮想のモデルを用いてエネルギー散逸がある媒質で新たに発生するいくつかの重要な性質を説明する。マクロに見た粘性流体や減衰といった現象は、「内部摩擦」と考えてよいが、その物質の物性的な視点から分子レベルによるミクロな立場で理解しないといけない。岩石は結晶構造をしており、かつ一部液体の可能性も含めて多成分なので、非常に複雑である。また、地球内部では高温高圧条件なので、実験そのもので決定することも難しい。それでも最近の技術の発達で地球内部の粘弾性的な性質のミクロな立場での理解が飛躍的に進んできた。ここでは２、３の基本的な要点を取り上げる（地質学、鉱物学、固体物性的地球物理学などを目指す者は、2.1 節で取り上げた Karata(2008) を参照するとよい)。

4.1　粘弾性媒質の現象論的なモデル： Phenomenological models for viscoelastic media

ばねにつながれた質点では $f_i = -kx_i$ というフックの法則があり、弾性体ではこれが のように、力 f_i が「応力テンソル σ_{ij}」に、変位 x_i が「歪みテンソル e_{kl}」に対応するフックの法則を第１，２章で示した。質点の力学では、実際のばねには非弾性的な減衰効果があり、これを速度に比例したまさつ力として形式的に導入して、減衰振動を学習したはずである。復習のために簡単に以下にまとめる。

変位を $x(t)$ として、バネ定数 k で繋がれた質量 m の質点の運動に、速度に比例した抵抗や摩擦といった力 $2\eta\dot{x}(t)$ を導入すると、運動方程式は以下のようになる：

$$\boxed{} \tag{4.1}$$

ここで、振動の固有の角周波数 ${\omega_0}^2 \equiv k/m$ と、減衰定数 $\gamma \equiv \eta/m$ を定義すると、以下の２階の常備分方程式になる：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{4.2}$$

この解は振動の形式なので、$x = A\exp(-i\omega t)$ と仮定する（A は定数)。これを上式に代入すると

$$(-i\omega)^2 A\exp(-i\omega t) - 2i\gamma\omega\exp(-i\omega t) + {\omega_0}^2 A\exp(-i\omega t) = 0 \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 - 2i\gamma\omega + {\omega_0}^2 = 0$$

という ω についての代数方程式となる。よって、解は

$$\boxed{}$$

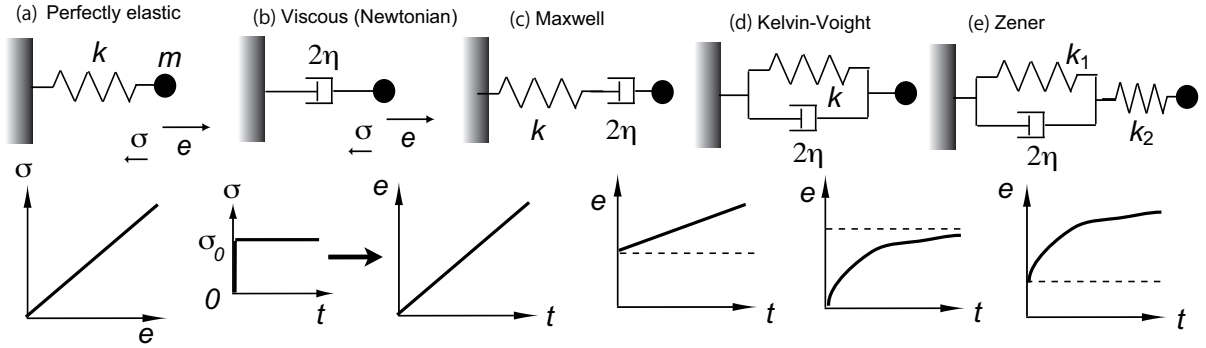
ここで、減衰が小さい、すなわち $\gamma \ll \omega_0$ とすると、

$$\omega \simeq -i\gamma \pm \omega_0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{} \tag{4.3}$$

となって、減衰がない場合の解 $A\exp(\pm i\omega_0 t)$ に $\exp(-\gamma t)$ という指数関数的に時間とともに振幅が減少する項がかかった形となる。つまり、 $\boxed{}$

質点の力学では上のように減衰を表わす項が付け加わった。そこで、固体のレオロジー、すなわち弾性的な性質と粘性的な性質が同時に存在する現象のために、弾性的性質を表現する と粘性的性質を表現する を繋げたモデルにより、マクロ的な挙動を説明する。厳密には媒質なので、応力と歪みについてそれぞれのテンソル成分を考慮しないといけないが、ここでは簡単のためにスカラー量である σ と e のみで考える。粘性的な性質については、 にあるニュートン流体を仮定する。

図 4-1



まず、完全弾性体においては、既に第２章の図２－１ (a) と (c) を再び取り上げ、図４－１ (a) に示すような応力と歪みが比例する場合を考える：

(4.4)

次に、第３章で説明したニュートン流体、すなわち応力と歪み速度が比例した粘性流体は、図４－１ (b) のようにダッシュポットで表現される：

(4.5)

例えば、$t < 0$ では応力をゼロとして、$t > 0$ では一定の応力 σ_0 をかけるとすると、$t = 0$ では歪み $e = 0$ ならば、$t > 0$ では なので、歪みは時間に比例して増大し、 となる（図４－１ (b) 下図)。

この両極端の場合を組み合わせることで、地球を構成している岩石などのレオロジー的性質をよく近似できる。まずは、ばねとダッシュポットを につないだ を導入する（図４－１ (c)）。この場合にはばねとダッシュポットにかかる応力は同じで、それがモデル両端にかかる応力 σ となり、全体の歪みは となる。式 (4.4) と (4.5) のばねとダッシュポットの歪みをそれぞれ $e_1(t), e_2(t)$ とすると、Maxwell モデルの構成則は以下のようなる：

まとめると、

(4.6)

線形な粘弾性体の構成則は式 (4.6) のように、応力とその時間微分に対して、歪みとの線形関係式となる (後の例では、歪み速度 (歪み率) も関係することが示される)。このような場合には、実験室での２種類の実験形態に応じての履歴を調べることが多い：（１）$t < 0$ では $e = 0$ から、$t \geq 0$ で $e = e_0$ という一定の歪み量を強制的にサンプルに与え、その応力の時間変化 $\sigma(t)$ を測定する、（２）$t < 0$ では $\sigma = 0$ から、$t \geq 0$ で $\sigma = \sigma_0$ という一定の応力を外からかけて、 を測定する (図４－１ (b) 下)。（１）の $\sigma(t)$ を”stress relaxation function”、（２）の $e(t)$ を”creep function”と呼ぶ。

[**問題４-１**] 図４－１の (a) 完全弾性体と (b) ニュートン流体（線形な粘性流体）の場合について、stress relaxation function と creep function をそれぞれ求めよ。

Maxwell モデルの stress relaxation function は、$t > 0$ では $\dot{e}$ がゼロなので、式 (4.6) の右辺で $\dot{e} = 0$ の方程式を解くと、未定定数 A として、[　　]となる。$t = 0$ ではばねによる e_1 成分のみなので（急激に動くのでダッシュポットは固定されるため、$e_2 = 0$）、$\sigma = ke_0 = A$ となるので、

[　　]

となる。一方で、creep function は $t > 0$ では $\dot{\sigma} = 0$ よりダッシュポットの e_2 のみなので、[　　]が成り立ち、未定定数 A を用いて、[　　]となる。$t = 0$ では stress relaxation function の場合と同じようにばねのみを考慮すればよいので、$e = \sigma_0/k = A$ が定まり、まとめると

[　　]

となる。図４－１の (c) 下には creep function を示す。どちらの実験でも、式 (4.6) の τ という時間の単位を持った値よりも短時間では[　　]が強く、それよりも長い時間スケールでは [　　]が支配的となることがわかる。言い換えると、ダッシュポットは短い時間スケールでは固定されるのでつながったようになるために、Maxwell モデルは (a) の完全弾性体と同じになる。一方で、長い時間スケールではずるずるとすべるためにばねの変形は関係なくなるので、(b) の粘性流体のように振る舞う。（この現象を定量的に理解するためには、すぐ後で示す周波数による応答を議論すると簡単である。）

ばねとダッシュポットを[　]に並べた図４－１ (d) の粘弾性モデルが、ケルビン・フォークトモデル（Kelvin-Voight model）である。この場合には、ばねとダッシュポットにかかる[　　]であり、それぞれにかかる応力 σ_1, σ_2 の和が全体にかかる応力となる。つまり、Kelvin-Voight モデルでは

[　　] (4.7)

ここで、τ は式 (4.6) と同じように、バネ定数と粘性率との比である。ここでは、σ が e および $\dot{e}$ との間に線形関係がある。creep function を求めると、$t < 0$ では $\sigma = 0$ なので、式 (4.7) の左辺をゼロとして $t = 0$ で $e = 0$ という初期条件で解くと、未定常数 A を用いて、[　　]と求まる。よって、式 (4.7) は $t = 0$ で $\sigma = \sigma_0 = kA$ より $A = \sigma_0/k$ と求まるので、まとめると cree　function は

[　　]

と、図４－１ (d) の下に示す形となる。$t = 0$ の急激な応力がかかることによって、ダッシュポットは[　]した状態となり、みかけの弾性率（σ_0/e）は[　　]となり、時間とともにダッシュポットの影響でみかけの弾性率が小さくなり、$t \to \infty$ ではダッシュポットが[　　]状態と同じなので、(a) と同じく弾性定数 k の完全弾性体に収束していく。実際の値を考えると、地球のアセノスフェアではだいたい弾性定数が $k = 10^{11}$Pa であり、粘性率は $\eta = 10^{20}$Pa·s 程度であるので、減衰する時定数の $\tau \simeq 30$ 年くらいとなる。つまり、これより短いとアセノスフェアは弾性的に振る舞い、長いタイムスケールでは粘性的な挙動を示す。（だたし、変形が起こる長さのスケールが異なると、実質的な粘性率なども異なるので、これほど単純ではないことに注意。）こうして、アセノスフェアは、地震学では固体として、プレート運動としては粘性流体として扱うわけである (詳しくは４節参照)。

[**問題４-２**] 文献を調べ、地球の (a) リソスフェア、および (b) マントル全体のそれぞれの τ の値を推定せよ。

固体地球を構成する高温高圧の岩石のレオロジーは、定性的には短い時間スケールで弾性的に、長い時間スケールでは粘性流体的に振る舞うはずなので、Maxwell モデルは前者、Kelvin-Voight モデルは後者の場合をそれぞれうまく表現している。そこで、この両者を組み合わせた（つまり並列と直列の両方を取り入

れた）標準モデル（standard model）として、図４－１ (e) のようなモデルを考える。これはツェナーモデル（Zener model）とも呼ばれる。ふたつのばねのバネ定数は k_1, k_2 とする。まず直列になっている２つの部分（ばね k_1 ＋ダッシュポット、およびばね k_2）の応力は全体の系にかかる σ で同じになり、全体にかかる歪みが２つの部分のそれぞれにかかる歪みの和 $e = e_1 + e_2$ となる。ばねとダッシュポットが並列につながっている部分は Kelvin-Voight モデルと同じく、歪みが同じ（e_1）で、応力はそれぞれの和となる。よって、２つの部分での応力と歪みの関係は以下のようになる：

$e = e_1 + e_2$ を加えた３つの式をまとめると、応力と歪み、およびそれらの時間微分との間に、Zener モデルは以下のような線形関係があることがわかる：

$$(k_1 + k_2)\sigma + 2\eta\dot{\sigma} = k_1 k_2 e + 2\eta k_2 \dot{e} \tag{4.8}$$

[**問題４-３**] Zener モデルの構成式 (4.8) を導け。

Maxwell モデルや Kelvin-Voight モデルについての式 (4.6) や (4.7) と同じ形式にするために、実効的なばね係数 k と、２つの粘性的な時間スケールを表す τ_σ と τ_e を導入した以下の形式に、式 (4.8) をまとめる：

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = k(e + \tau_e \dot{e}) \tag{4.9}$$

こうすると、Zener モデルは前出の２つのモデルを一般的に拡張した線形な粘弾性モデルであることがわかる。以下に示す物理的な解釈のために、上の３つのパラメターには次の関係があることを指摘する：

(4.10)

式 (4.9) より、k は応力と歪みの時間微分をゼロとした場合の実効バネ係数に当たる。つまり、非常にゆっくりと力が加わった場合の弾性定数に当たるが、図４－１ (e) でゆっくり力が加わるとダッシュポットは切れたように振る舞うので、二つのばねが直列につながった場合と同じになり、よって k の値に対応することがわかる。急激な力を与えると、応力と歪みの時間微分の項が支配的になるので となり、実効バネ係数は $k\tau_e/\tau_\sigma = k_2$ となる。つまり、急激に動かすとダッシュポットが になるので、ひとつのばね k_2 だけに対応する。式 (4.10) より、これはゆっくり動かす場合の k よりも実効的なバネ係数が大きくなる。このように、粘弾性媒質の実効的な弾性係数はかかる応力がゆっくりか速いかによって必然的に異なるわけで、「周波数依存性」という重要な性質が生じる。波が伝搬する場合には という現象に対応し、次節で簡単に説明する。

最後に Zener モデルについての creep function を求める。$t > 0$ では $\dot{\sigma} = 0, \sigma = \sigma_0$ なので、式 (4.9) は $\sigma_0 = k(e + \tau_e \dot{e})$ となるので、この微分方程式を解くと（まず左辺がゼロの斉次の方程式を解くと、$e(t) \propto \exp(-t/\tau_e)$ となり、あとは適当に定数をつけると左辺も含めた一般解となる）、

のような未定定数 A を含む形となる。あとは、$t = 0$ の場合についての瞬時の応答、すなわち弾性的な応答のみを考えると、A も決まる。すなわち、上で議論したように実効的なバネ定数は k_2 のみになるので、$\sigma_0 = k_2 e$ なる。上の式で $t = 0$ とおいて $e = \sigma_0/k_2 = \sigma_0/k(1 - A)$ より、$A = k(1/k - 1/k_2) = 1 - \tau_\sigma/\tau_e$ と求まるので、Zener モデルの creep function は以下のようになる：

(4.11)

これは図４－１ (e) 下にあるような応答である。つまり、$t=0$ で $e=\sigma_0/k_2$ の弾性応答をした後に、Kelvin-Voight モデルでの $\exp(-t/\tau_e)$ のようにばね定数 k_1 とダッシュポットの比である時定数 τ_e で負の指数関数的に時間変化していく。$t\to\infty$ では $\boxed{}$ と、直列につながった二つのばねと同じ実効的なバネ係数の値に収束していく。

地震波の伝搬などの比較的周期が短い現象については、固体地球の応答は Zener モデルの改良型でかなりよく表現できる。マントル対流等の非常に時間スケールの長い現象は粘性効果が卓越するので、Zener モデルの creep function のように $t\to\infty$ で $e(t)$ がある値に収束したようなことはなくて、ずるずると流れて e は増大する。Zener モデルにもう一つダッシュポットを直列につないだ Burgers モデルという形が、このような長時間スケールの固体流動では用いられる（詳しくは、Korato, 2008 を参照のこと）。

4.2　粘弾性媒質の周波数依存性：Frequency dependency of viscoelastic media

前節では、図４－１のいくつかの代表的な粘弾性モデルについての構成則と、creep function という時間応答の一例を示した。そして、最後の Zener モデルでは、かかる力がゆっくりか急激かで実効的な弾性定数が異なることを触れた。ここではそのような周波数による粘弾性媒質の振る舞いをより理解するために、振動を与えた場合の応答を考える。つまり、あるひとつの角周波数 ω の正弦波として応力を加えた時に、歪みがどのような振る舞いをするかを求める。この場合には歪みもやはり角周波数 ω の正弦波で応答するが、その振幅が応力の振幅とどのような比になるか、さらに後で示すように同じ位相（つまり、ゼロ、最大値、ゼロ、最小値と繰り返すタイミング）が応力と歪みの間のずれの量を求める。このような扱いなら Zener モデルのようなやや複雑な場合でも、以下のように重要な性質が簡単に求めることができる（より一般的な議論は、蓬田の第７、８章のフーリエ級数やフーリエ変換を参照せよ）。

角周波数 ω の正弦波は $\cos(\omega t)$ の形だが、計算が簡単なように、$e^{-i\omega t}$ の因子をかけてその実部を最終的に考える。つまり、$\sigma(t)=\sigma_0 e^{-i\omega t}$、および $e(t)=e_0 e^{-i\omega t}$ として、式 (4.9) に代入する：

$$\boxed{}$$

つまり、応力 $\omega(t)$ と歪み $e(t)$ の関係は、複素数のバネ定数（弾性定数）K で比例した形になる：

$$\boxed{} \tag{4.12}$$

ここで、$\boxed{}$ のように、複素数のバネ定数 K の絶対値 $\bar{k}$ と偏角 (位相、phase とも呼ぶ）δ を求める。$\bar{k}$ は実効的なバネ定数の大きさを表わし、角周波数 ω による：

$$\bar{k}(\omega)=k\frac{\sqrt{\left(1+\omega^2\tau_\sigma\tau_e\right)^2+\omega^2\left(\tau_\sigma-\tau_e\right)^2}}{1+\omega^2{\tau_\sigma}^2}=k\frac{\sqrt{1+\omega^2({\tau_\sigma}^2+{\tau_e}^2)+\omega^4{\tau_\sigma}^2{\tau_e}^2}}{1+\omega^2{\tau_\sigma}^2} \tag{4.13}$$

となるので、低周波数と高周波数での極限では以下の値になる：

$$\bar{k} \longrightarrow \boxed{}\ (\omega\to 0) \tag{4.14}$$

$$\longrightarrow \boxed{}\ (\omega\to\infty) \tag{4.15}$$

この２つの極限は、creep function の式 (4.11) において、$t\to\infty$ と $t=0$ でのバネ定数にそれぞれ対応する。つまり、前者は非常にゆっくりと長時間応力をかけ続けた場合の実効的なバネ定数であり、後者は瞬時にかかった応力への応答におけるバネ定数に対応する。

一方、位相、すなわち K の実部と虚部の比は、やはり周波数に依存して、

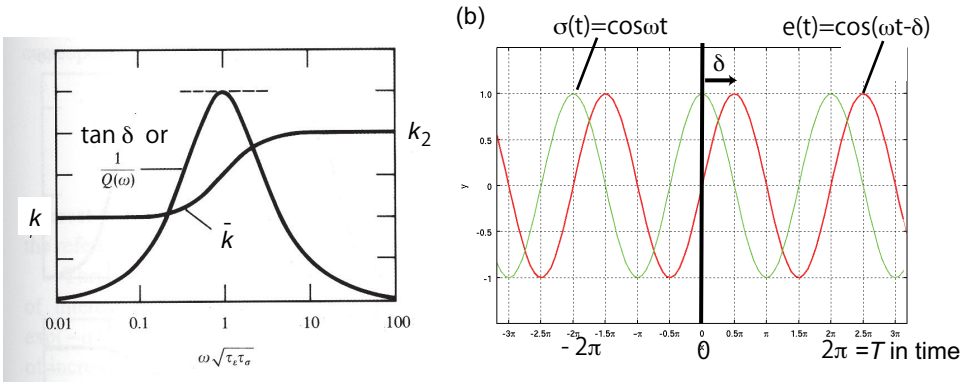
$$\boxed{} \tag{4.16}$$

となる。上で示したように、$\tau_e > \tau_\sigma$ より、$\delta > 0$ となっている。低周波数と高周波数での極限では、どちらもゼロに収束する：

$$\boxed{} \tag{4.17}$$

図４－２ (a) に $\bar{k}$ と $tan\delta$ の２つの量の周波数依存性を模式的に示す。式 (4.16) から $\omega = 1/\sqrt{\tau_e \tau_\sigma}$ で $\tan\delta(\omega)$ が最大になるようなピークを持ち、その周波数の付近で式 (4.13) より $\bar{k}(\omega)$ は増加している。$\tan\delta$ がゼロに近づく低周波数 ($\omega \to 0$) と高周波数 ($\omega \to \infty$) の領域では、$\bar{k}$ の周波数による変化もなくなっている。

図４－２



[**問題４－４**] $\tan\delta(\omega)$ が最大となる周波数、およびその値を求めよ。その最大値の値の半分になる周波数から、ピークの幅を求めよ。また、$\bar{k}(\omega)$ が大きく変化する周波数領域はだいたいどの範囲か、調べよ。

$\tan\delta(\omega)$ の物理的な意味を考える。先に $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-i\omega t}$ とおいたが、これは実部を取るので実際には $\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t)$ と応力をかけたことになる。この時に、$e(t) = \sigma(t)/K = \sigma(t)e^{i\delta}/\bar{k}$ となったわけだが、これも実部を実際にとるわけなので、実際の応答は

$$\boxed{}$$

となる。すなわち、応力が $\cos(\omega t)$ とかかるのに、Zener モデルの応答は $\cos(\omega t - \delta)$ と δ だけ位相がずれている。図４－２ (b) で模式的に示すように、$\delta > 0$ ならば、応答がその位相分だけ「遅延」delay することに当たる。完全弾性体の場合には、$\delta = 0$ なのでこのような「位相の遅れ」(phase delay) はないから、粘性的な性質のために生じたことになる。Zener モデルにはダッシュポットがすべる場合に $\boxed{}$ が生じることがわかる。既に述べたように、ω がゼロと無限大の極限ではダッシュポットはそれぞれ $\boxed{}$ と $\boxed{}$ の極端な形に当たり、ダッシュポットはすべらないので、式 (4.17) のように位相の遅れはゼロに収束する。

[**問題４－５**] Zener モデルの周波数応答で求めたように、Maxwell モデル、および Kelvin-Voight モデルについて、実効的な弾性定数と位相遅延 $\tan\delta$ の周波数依存性を求めよ。

4.3　粘弾性媒質の減衰特性：Intrinsic attenuation of viscoelastic media

前節では Zener モデルについて、バネ係数 K が $\boxed{}$ となり、その絶対値の他に、実部と虚部の比に当たる位相の遅れという現象が生じることを、周波数依存性も含めて説明した。違った視点を取ると、位相の遅れは、振幅が振動していくと $\boxed{}$ 現象、すなわち本章の最初に示した初等力学での減衰振動の方程式（4.2）とその解 (4.3) の γ という係数と直接関係している、すなわち減衰の大きさ（Q^{-1} という無次元量を用いるのが一般的）に関係していることを、質点の振動を例にして簡単に示す。

式 (4.3) の解の形のように、振幅は $\exp(-\gamma t)$ のような指数関数的に時間とともに現象する。ここで次のような値を定義する（電子回路の共鳴現象について最初に定義されたようである）：

$$\boxed{} \tag{4.18}$$

ここで E は振動の平均のエネルギーであり（減衰振動の場合には一周期での平均とみなせばよい）、ΔE は一周期後の運動エネルギーの減少量である。$\Delta E/E \ll 1$、すなわち振動しながら減衰するような場合（減衰が大きく一周期分の振動もせずにゼロに収束していくような場合も、初等力学では扱ったかもしれないが）のみを考える。式（4.3）で仮定した $\gamma \ll \omega_0$ という条件と同じである。この場合、一周期後（$t \to t+T,\ T \equiv 2\pi/\omega_0$）の運動エネルギーの減少量は、式 (4.3) を用いて

$$\Delta \ln E = \ln\left(\frac{1}{2}\left|\dot{x}(t)\right|^2\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\left|\dot{x}(t+T)\right|^2\right) = \ln\left({\omega_0}^2 A^2 e^{-2\gamma t}\right) - \ln\left({\omega_0}^2 A^2 e^{-2\gamma(t+T)}\right)$$

$$\simeq \ln\left({\omega_0}^2 e^{-2\gamma t}\right) - \ln\left({\omega_0}^2 e^{-2\gamma(t+T)}\right) = -2\gamma t + 2\gamma(t+T) = 2\gamma T$$

より、

$$\boxed{} \tag{4.19}$$

と、減衰定数 γ と Q^{-1} の関係が求まった、よって、式（4.3）の減衰振動は (4.18) の Q を用いると、以下のようになる：

$$\boxed{} \tag{4.20}$$

次に、減衰の大きさを表わす Q^{-1} は、複素数の弾性定数 $K = \bar{k}e^{-i\delta}$ の位相の遅れ δ と深い関係にあることを示す。応力と歪みの位相が一致した場合に比べてずれると、エネルギーは減少し、それが Q^{-1} 値と関係する。実部のみを扱うことを明記して位相差を表すため、ここでは $\sigma(t) = \mathrm{Re}\left\{\sigma_0 e^{-i\omega t}\right\} = \boxed{}$、および $e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sigma(t)/K\right\} = \sigma_0/\bar{k}\ \mathrm{Re}\left\{e^{i\delta}e^{-i\omega t}\right\} = \boxed{}$ とみなす。すると、平均エネルギー E と一周期 T 秒後の減少分 ΔE は以下のようになる（式（2.4）$aU = TdS + \sigma_{ij}de_{ij}$ や（2.6）の第２項の歪みエネルギー分に着目する）：

$$\boxed{}$$

$$\Delta E = \int_0^{e(T)} \sigma(t)de = \int_0^T \sigma(t)\dot{e}(t)dt = -\omega\sigma_0 e_0 \int_0^T \cos\omega t \cdot \sin(\omega t - \delta)dt$$

$$= -\frac{\omega}{2}\sigma_0 e_0 \int_0^T \left[\sin(2\omega t - \delta) - \sin\delta\right] dt = \frac{\omega}{2}\sigma_0 e_0 \int_0^T \sin\delta dt = \frac{\omega}{2}\sigma_0 e_0 sin\delta \cdot T \simeq \pi\sigma_0 e_0 \sin\delta$$

ここで、周期 $T = 2\pi/\omega_0 \simeq 2\pi/\omega$ を用いた。まとめると、

$$Q^{-1} = \boxed{} \tag{4.21}$$

となる。位相の遅れ δ が大きいと Q^{-1} は大きい、つまり減衰率が大きいことを示す。また、ここで扱っているような減衰が小さい場合は、$\delta \ll 1$（つまり、$Q \gg 1$ や $\gamma \ll \omega$ に対応する）なので、$\cos\delta \simeq 1$ より、Zener モデルでは減衰率の周波数依存性は式 (4.16) から、以下のようになる：

$$\boxed{} \tag{4.22}$$

つまり、図４－２ (a) の位相の遅れ $\tan\delta$ は、減衰率 Q^{-1} に対応することがわかる。位相が遅れるということは、ダッシュポットが $\boxed{}$ ことに起因するから、その大きさがエネルギーの減少量に対応するわけである。周波数がゼロではダッシュポットは $\boxed{}$、無限大では $\boxed{}$ に対応するので、これらの極限では位相の遅れも減衰率もゼロになるのに対して、ダッシュポットの粘性率とバネ係数との比による時定数 τ_e, τ_σ に対応する周波数帯域のみで位相の送れと減衰が生じる。

最後に、この減衰という現象を波が伝搬していく状況で考える。この場合には、伝搬していく距離が長くなるにつれて、エネルギーが減少、つまり振幅が減少していくので、その距離に対する減衰率が上で定義された Q^{-1} に関係する。2.4 節の弾性方程式 (2.23) において、複素数の弾性定数 $K \equiv \sigma/e$ の場合には、速度 c が実数ではなく複素数になることを以下に示す。簡単のために、応力も歪みや変位も x 成分のみのスカラー量とする。密度 ρ として、変位 $u(x,t)$ についての運動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = K\frac{\partial e}{\partial x} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。ここで、式 (2.26) のような x の正の方向に速度 c で伝搬する角周波数 ω で振幅 A の平面波

を考え、上の式に代入すると、

減衰がある媒質では K が複素数なので、速度 c も複素数になる。その物理的意味は先の場合と同じく、$K \equiv \bar{k}e^{-i\delta}$ のように、絶対値と位相のずれ δ にすると、

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{\rho}{K}\right)^{1/2} =$$

これまで仮定してきたように、$\delta \ll 1$ より $\cos(\delta/2) \simeq 1, Q^{-1} = \sin\delta = 2\sin(\delta/2)\cos(\delta/2) \simeq 2\sin(\delta/2)$ より、速度の逆数は以下のように表現できる：

$$\frac{1}{c} \simeq \tag{4.23}$$

ここで、$c_0 = \sqrt{k/\rho}$ は K の絶対値による実効的な速度である。虚数部分が減衰を表わすことになり、伝搬する平面波は以下のように表される：

$$\tag{4.24}$$

のように、伝搬しながら振幅が $\exp(-\omega x/2c_0Q)$ という割合で距離 x について減衰する平面波となる。

なお、実際の地球内部を伝搬する地震波の Q を測定すると、だいたい 100 から 1000 程度であり、上で仮定した $Q^{-1} = \sin\delta \ll 1$ を十分に満たしている。ただし、図４－２ (a) のように一つの周波数領域のみに Q^{-1} が大きいのではなく、周期 0.1 秒から数百秒くらいにわたりほぼ一定（地域差などは大きいことに注意）なので、図４－１ (e) の Zener モデルでは説明できず、若干の改良が必要である。詳しくは、Karato (2008) などを参照せよ。

[**問題４－６**] 式 (4.24) の振幅の減衰の空間変化においては、Q の定義の式 (4.18) の ΔE が「x の正の方向に一波長だけ伝搬した場合のエネルギーの減少量」に対応していることを示せ。

4.4 粘弾性媒質と岩石のレオロジー序論：Introduction to material sciences on viscoelasticity

前節までは、図４－１に示すような、ばねとダッシュポットの組み合わせによる現象論的モデルによって、地球などの構成物質の粘弾性的な特徴を説明した。特に、弾性的性質や減衰率に周波数依存性があることを強調した。近年は、構成物質である種々の岩石サンプルを高温・高圧下で実験を行ない、原子・分子レベルでの粘弾性的性質を説明する研究が飛躍的に発展している。詳しくは、Karato(2008) やその他の講義で触れられるはずなので、ここでは基本的ないくつかの要点のみをまとめる。その中でも、粘性率の温度変化は地球惑星内部での種々の現象に重要である。

岩石サンプルを高温高圧下で変形させる実験は、1970 年代から精力的に始められた。つまり、さまざまなサンプルに対して種々の温度・圧力条件下で、応力 σ と歪み率（歪み速度）$\dot{e}$ の測定を行なう実験である (別ページの参考資料を参照のこと)。例えば、「定歪み速度試験」では、歪み速度 $\dot{e}$ を一定にしてサンプルを強制的に変形させ、その応力 σ を測定する。前節でも触れた「クリープ試験 (creep experiment)」では、逆に応力を一定にかけながら、サンプルの歪み e の時間変化を測定する。用いるサンプルは、粉末か、ほぼ同じ大きさに揃えた単結晶の粒を集めたものである。

このような実験において、種々の条件を変化させて測定を行なう。重要なパラメターは以下のようである：（1）岩石資料の鉱物組成、（2）圧力 p（式 (1.9) のように 3 軸の応力の平均値であり、このような実験では「封圧」confining pressure と呼ぶ)、（3）温度 T、（4）水の飽和度、（5）粒子サイズ d、などである。このうち、とりわけ応力と歪み速度の関係は、（3）の温度によって大きく影響される。多くの実験結果から、歪み速度の対数 $\log \dot{e}$ と絶対温度の逆数 $1/T$ の間には、ほぼ負の相関のある線形関係が成り立つことがわかった（例えば、参考資料の図 2.7 を見よ)。つまり、ある正の定数 α を用いると

$$\boxed{} \tag{4.25}$$

となる。ここで、右辺のように E と R という 2 つの定数を導入した。この形は物理の統計力学でのマックスウェル・ボルツマン分布（Maxwell-Boltzmann distribution）や、化学での化学反応速度式での温度依存性と同じ形式であり、E は活性化エネルギー（activation energy)、R はガス定数と呼ばれる値である。化学反応速度の測定では、対数の値と絶対速度の逆数の線形関係は、アーレニウスプロット（Arrhenius plot）と呼ばれる、化学実験では最重要の式の一つである。物理でも化学でも得意な方を参照して、分子論的な考察を復習するとよい。要点だけ述べると、分子結合がずれるためには E というエネルギー値の壁を各原子は乗り越えないといけないが、原子の熱振動によりこれを乗り越える。分子論的定義が E というエネルギーレベルを占める「確率」が、$\exp(-E/kT)$ として絶対温度 T が定義されることが本質的である。ここで、ボルツマン定数 $k \equiv R/N$ とガス定数 R をアボガドロ数 N で割った、「分子 1 個あたりのガス定数」となるので、マクロの実験では式 (4.25) の形式になるわけである。

さらに、式 (4.25) の関係は、封圧 p にも依存する（T ほど強く影響は受けないが)。定圧実験では活性化エネルギー E の代わりに、エンタルピー $H \equiv E + pV$ という新しい「活性化体積」という V というパラメターも含めた値を用いるとよい（参考資料の図 2.7 のように封圧によって、アーレニウスプロットの y 切片が異なることに対応する)。よって、応力と歪み速度との線形関係が温度と圧力のみの関数だとすると、比例定数 A を用いて

$$\boxed{} \tag{4.26}$$

と、表現される。式 (3.6) で示したように、歪み速度 $\dot{e}$ と応力 σ が比例するニュートン流体の場合は、上の式が温度・圧力変化も含めた式になり、粘性率は $\sigma = 2\eta\dot{e}$ だから、$\eta(T, p)$ という形になる。

しかし、地球内部を構成する主要な鉱物組成サンプルの高温高圧での変形実験によると、応力 σ と歪み速度 $\dot{e}$ は、比例関係にないことが初期の実験からでも判明された（例：参考資料の図 2.3)。つまり、少なくとも固体地球（他の岩石でできた惑星・衛星も）はニュートン流体としては取り扱えない。応力の n 乗と歪み速度 $\dot{e}$ が比例すると近似して、以下の形式が一般的に適用されている：

$$\boxed{} \tag{4.27}$$

$n = 1$ の特殊な場合が、ニュートン流体の関係式 (4.26) に当たる。一般的な非線形な関係の粘性流体を「非ニュートン流体」(non-Newtonian fluid）と呼ぶ。パラメターである A, E, V, n は実験で測定する。参考資料の表 2.1 にはまとめの一例を示す。鉱物の種類や、水の飽和度などの条件でこれらの数値は大きく異なるが、非線形を表わすべき数 n は地球の主要構成鉱物ではだいたい $n = 3 \sim 4$ である。

[**問題４－７**] 非ニュートン流体の場合の粘性率はどのように表わされるか。そして、それが温度や封圧ば

かりでなく、応力の大きさによっても変化することを確かめよ。

最近の実験では、特に水の有無によって、式 (4.27) のパラメターが著しく異なることが示唆され、地球内部のダイナミックな挙動に大きな影響を与えていることがわかっている。また、ゆっくりした振動（地震のようにインパルス的な波を放出するのではなく、だらだらと長時間に渡って振動を励起する）などが日本での高密度地震観測によって沈み込むプレートの境界付近で発見されるに至り、より重要性を増している。一方、金星内部は高温だが水がないと推定され、それによって流動特性が地球とは異なり、地球とはかなり異なる金星のテクトニクスの形態も議論されている。さらに、特殊な実験装置が開発されて、式 (4.27) に粒経 d が入った式も詳しく検討されている。複数の鉱物と固融体からなる造岩鉱物では、一部だけが融けた、いわゆる[　　]が発生し、アセノスフェアやマントルウェッジ（沈み込むプレートの上側のマントル）ではその存在が指示されているが、部分溶融の量ばかりかその形状によって、その部分の粘性率や弾性率（地震波速度)、減衰率 Q^{-1} が、どう変化するかも、発展中の研究分野である。(最新の成果は、Karato(2008) にまとめられているが、これ以降も毎年新しい研究成果が出ている。)

式 (4.27) でまとめられているレオロジーとしての性質は、物性物理学や材料工学の分野では分子・原子レベルといったミクロな視点からの研究が中心である（例：流行のナノテクノロジーもこのような変形に関するものも多い)。鉱物は原子が規則正しく配列する[　　]を持っている。マクロの粘性的な大変形ではこの結晶構造を崩す必要がある。しかし、教科書的な厳密な結晶構造を崩すためには、マクロな実験で得られた値（特に、障壁となる活性化エネルギー E）をミクロな電子軌道などからの推定値と比べると、著しく小さい応力で変形している。これは、規則正しい結晶構造のネットワークが壊れるのではなく、（１）不完全な結晶構造の箇所はエネルギーレベルが小さい（壊しやすい）ので、その不規則な結合部分の形態そのものが隣接する結晶の単位へ移動するか、（２）粒子どおしの境界面では結晶構造は崩れているので、やはりエネルギーレベルが低く、そのような粒界に沿っての原子・分子の移動が起こる、といったミクロなメカニズムによると考えられている。

（１）は物性物理学では、[　　]と呼ばれており、平面的な格子欠陥は「刀状転移」(edge dislocation）と、結晶のある面をたどっていくとその面と直角方向に結晶構造がずれている「らせん転移」(screw dislocation）がある。参考資料の図 2.21 に模式的にこの２種類の格子欠陥のタイプを示す。また、図 2.20 にはどのように転移が移動することで、マクロな変形が生じるかの、模式的に示す。地球深部の主要構成鉱物であるオリビンでは、強い酸性の液に付けるとこのような弱い格子欠陥の部分が浸食されて、顕微鏡下で黒い筋として見える。実験の前後でこのような格子欠陥の形状や密度を調べることで、マクロレベルの変形とミクロな格子欠陥の関係が視覚的にも調べられる。（２）は「界面クリープ」と呼ばれ、境界面の状態、とりわけ不純物の量や部分溶融がある場合にはそのミクロな形状が、マクロな変形様式に大きく影響する。最新のミクロレベルの研究の成果や実験手法は、Karata(2008) からまず入っていくとよいであろう。