

第2章 フックの法則と弾性運動方程式

バネ定数 k のバネの先についた質量 m の質点の運動方程式

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i = -kx_i \quad (i = 1, 2, 3 \text{ or } x, y, z)$$

と、弾性体や流体といった連続体媒質の場合の比較を第1章では行った。上の式の力の成分 f_i に対応するのが応力テンソル σ_{ij} であり、位置ベクトル x_i に対応する量が歪みテンソル e_{ij} であることを示した。本章では上式の2つの等号 (=) について弾性体の場合の関係を求める。まず2番目の等号である力と位置の関係であるフックの法則について、応力・歪みテンソルに対して求める。次に、最初の等号である慣性力と力の関係である弾性運動方程式を求める。固体地球惑星科学で使用する力学的な現象は、この章の内容で大部分はカバーすることができる。流体现象においても若干の変更があるだけで、基本的には同じことは第3章で示される。

2.1 フックの法則と弾性定数 Hooke's law and elastic constants

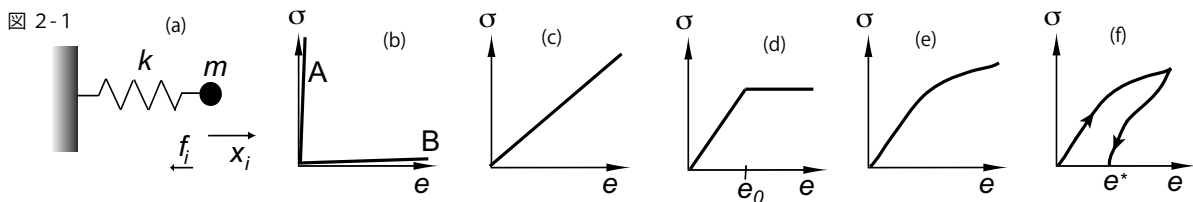
ばねにつながれた質点では、ばねの「釣り合いの位置からのずれ」と力が比例する、という関係を暗黙のうちに用いて学習したはずである。つまり、図2-1 (a) のように x_i 方向のみに質点が動くすると、そこにかかる

と「仮定」する：

$$(2.1)$$

この比例係数を「ばね定数」と一般に呼ぶ。マイナスの符号が付くのは、つりあいの位置からずれた方向と反対方向に力がかかる、すなわちつりあいの位置に常に戻るような力がかかるからである。

として広く知られる。理想気体のボイル・シャルルの法則と同様に、このような関係は物質の物性にに基づき、その と呼ばれ、以下では「完全な」弾性体の構成則を考える。種々の地球惑星科学の現象に広く応用がされる粘性流体や非弾性効果も含む「完全でない」弾性体の構成則については、後の章で考える。



ニュートンの力学形式の式 (2.1) に示す「比例」関係は、実際の経験則として推測・確認されている。一方、スカラー量であるラグランジアン、すなわちポテンシャルエネルギーを出発点とする解析力学の立場では、この比例関係はその数学的表現から必然的である。

し、ここからのずれは座標の2次形式が基本となる。このように考えると、つりあいからのずれが微小の場合に、比例関係は必ず成立し、それは熱力学の可逆過程に対応する。このように力の成分ではなく、ポテンシャルエネルギーと熱力学変数を以下に考えることで、複雑な弾性体（流体も）の構成則の重要な性質が理解できる。

種々の物質のつりあいからのずれ e とそこにかかる力 σ との関係を図2-1 に模式的にいくつか示す。(b) には、これまでの物理学・化学で学習した A (変形しないので $e=0$ となる) と B (粘性がなく、力が少しでも加わったら力がゼロになるまで変形してしまう、 $\sigma=0$) という極端な二つの場合を示す。(c) は式 (2.1) の を示す。多くの固体は近似的にフックの法則に従って変形するが、大きく変形すると強度がなくなり、流れたり破壊される。(d) はその極端な場合で、変形が e_0

まで達するまでは応力と歪みは比例するが、それ以上になると流れたり されたことを示す。実際の多くの固体では (e) のように変形が大きくなるにつれて徐々に比例関係が崩れて行く。変形が大きくなると、かかる力を解放しても完全に元の形には戻らず、) e^* が残ってしまう。(f) で示すようなこの現象はかかる力の履歴に複雑に関係して変わる。このような曲線を と呼ぶ (磁性体の磁化と外部の磁場は同様の関係があることを、電磁気学で学んだかもしれない)。

地球惑星科学の構成物質、とりわけ固体部分を構成する岩石や氷は、(e) や (f) の性質を厳密には持っており、複雑な場合も多い。このような「非線形な変形」(non-linear deformation) については後の章で簡単に触れる (S. Karato, "Deformation of Earth Materials", Cambridge University Press は最近の成果と地球惑星科学への応用まで含めた優れた内容で、この方面の研究を目指している者は必読書)。このような非線形性は弾性体においては、「大変形」の場合に現れる。第 1 章の歪みの例でも示したように、固体部分に関する現象のほとんどは という仮定が成立しており、(c) のようなフックの法則が成立するとみなしてよい。(微小変形ばかりが研究対象だった地震学などでも、最近は大きな地震での強い揺れに際しては地盤がフックの法則から明らかにはずれるデータも集まるようになっており、今後の研究では非線形性も十分に考慮しないといけない時代がすぐにやってくるかもしれない。)

この章では、式 (2.1) や図 2-1 (c) のように のみを扱う。応力と歪みは添字がそれぞれ 2 つある 2 階のテンソルであるので、比例係数はそれぞれの添字が入った、合計 4 つの添字をもつ形式となる：

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ or } x, y, z) \quad (2.2)$$

バネでは k という値であったのが、一般の固体では C_{ijkl} となった。しかし、応力と歪みテンソルの対称性 (式 (1.14) と (1.23)) から、(2.2) の添字 i と j 、および k と l は交換しても同じなので、

となり、この係数は $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 個ではなくて、36 個の独立な係数となる。さらに、以下のような熱力学的な考察から、応力テンソルの添字 ij と歪みテンソルの添字 kl との間でも対称性 ($C_{ijkl} = C_{klij}$) が成り立つので、最終的に独立な係数は 21 個となる。

気体や液体を対象として考えた初等の熱力学では、内部エネルギー U は出入りする熱量 $d'Q$ と圧力 p によって外側からなされる仕事による体積 V の変化から増減が決まるので、

$$(2.3)$$

と表せる。ここで、出入りする熱量は「過程」によって一律でないので、状態量として表わすことができず (例：十分にゆっくりした可逆過程の場合と不可逆過程である場合との違い)、微分の形式 dQ では表現できず、 $d'Q$ となるのが本質的である (新しい熱力学の優れた教科書として、田崎晴明「熱力学-現代的な視点から」培風館がある。長い休みを使って読んでみると、漠然と理解していた熱力学の概念が納得できるかもしれないので、お薦め)。熱力学第 2 法則より熱力学的な状態量として という量を導入することで、 (T は絶対温度) と微分形式の形になる。

気体や流体 (厳密には粘性がなく等方的な理想流体) では外部からの仕事は、式 (2.3) の右辺第 2 項の $-pdV$ で表現されるが、第 1 章で導入したような応力テンソルと歪みテンソルで表わされる弾性体の場合は外部からの仕事はどう表現されるか。圧力 p は式 (1.9) のような応力テンソルの特別な場合であり、また体積変化と歪みの関係は式 (1.25) であった。どの方向の圧縮力も同じなら、気体などはせん断応力がゼロなので、式 (1.9) から $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ と対応する。式 (1.25) からは単位体積あたりの体積変化 $dV/V = de_{ii}$ のような対応となることがわかる。せん断応力が存在するなどの一般的な場合には、 $-pdV$ の項は σ_{ij} と de_{ij} の積を各成分で足し合わせものであることが比較から推定される (厳密には、連続体の外側の面にかかる

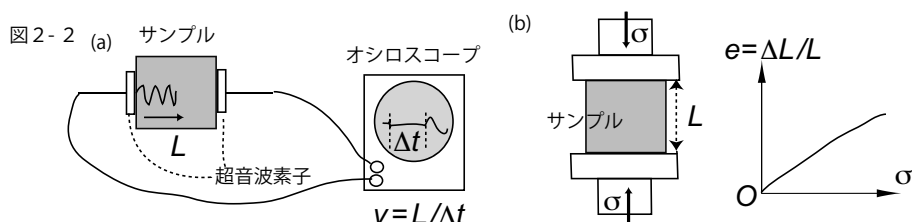
仕事量をかかす力の traction である t_i と歪みテンソルによる変形分の積を各成分で足し合わせた和として示すことができる。証明は、Aki and Richards, "Quantitative Seismology", 2.2 節などを参照)。よって、式 (2.3) は一般の弾性体については、以下のように拡張される：

$$(2.4)$$

熱力学で重要なのは、 $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}$ という点である。上式の左の微分形式から、気体などの内部エネルギーはエントロピーと体積の関数、 $U(S, V)$ であることがわかる。弾性体においては上式の右の微分形式から同様に、 $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}$ とわかる。ここで直ちに、式 (2.4) から

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}, \quad (2.5)$$

となることがわかる。この偏微分ではエントロピー S を一定した場合の関係式となっている、すなわち $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}$ における状態方程式を示す。岩石サンプルの室内実験では、図 2-2 (a) のような超音波素子による伝搬速度の測定などは、振動の周期が熱拡散の時間スケールよりもはるかに短いので、断熱過程である。実際の地球惑星で観測では、地震波の伝搬が代表例である。



室内実験、及び実際の地球惑星科学での現象で見られるもう一つの場合としては、十分にゆっくり変形するような $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}$ がある。図 2-2 (b) のように、岩石サンプルをプレス機械でゆっくりと変形させてその応力と歪みの関係を測定する場合がこの一例である。プレート運動などのように長い時間スケールでの現象はこれに当たる。等温過程ではエントロピーの代わりに温度 T が変数となる量を導入する必要がある。熱力学によれば、以下のような正準変換によって定義される

がこれに当たる。式 (2.4) と対応させると、

$$(2.6)$$

この $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}$ の微分形式から、温度 T を一定にした場合の関係式が得られる：

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{e_{ij}}, \quad (2.7)$$

[問題 2-1] 同じ物質でも断熱過程と等温過程で測定した場合には、式 (2.5) と (2.7) が異なるように、弾性定数、すなわち硬さが異なる。どちらの場合が弾性定数が大きくなるはずか。(ヒント：比熱の場合は熱力学でやったはずである、つまり、定圧比熱 C_p と定積比熱 C_v との関係はどちらが大きい。) 断熱過程での弾性定数 K_S と等温過程での K_T との間には以下の関係があることがわかっている： $K_S/K_T = C_p/C_v \simeq 1 + \gamma\alpha T$ 。ここで α は熱膨張率で岩石では $3 \times 10^{-5} \text{ T}^{-1}$ 程度であり、 γ は Mie-Grüneisen 数という 2 ~ 3 程度の値である。地球内部で温度 1000 度程度とすると、二つ弾性定数の差は約 10 % にも達する。詳しくは、Karato(2008) を参照せよ。

断熱過程でも等温過程でも熱力学的な考察から、ある関数 W (断熱だと U で、等温だと F) を用いて、

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \right)_{S \text{ or } T} \quad (2.8)$$

の形式で応力テンソルと歪みテンソルの関係、すなわち弾性体の構成則が表現できる。この W は変形に伴うエネルギーとみなせるので、「歪みエネルギー」(strain energy) と呼ばれる。これと、式 (2.2) を用いると、次の関係を導くことができる：

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} = C_{klij}$$

このように弾性定数の添字 ij と kl は交換しても同じ、つまり対称であることがわかる。先に示した対称性も含めてまとめると、

(2.9)

となり、 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 個だった係数は、最終的に「21 個の独立な弾性定数」であることが示された。

なお、熱力学的考察から導かれた $C_{ijkl} = C_{klij}$ という対称性は、歪みエネルギー W の形から導けたが、エネルギーなので定数の増減のあいまいさが残る。例えば、変形がゼロのつりあいの状態、すなわち $e_{ij} = 0$ で $W = 0$ と基準値を選ぶことができる。すると、式 (2.8) より添字 ij が繰り返す和を取る事を考慮すると、

(2.10)

のように、歪みテンソル e_{ij} の 2 次形式となる。

のはず

だから、変形して e_{ij} がゼロでなければ、正でも負でも（例：引っ張りでも圧縮でも）歪みエネルギーは増えるはずなので、

、つまり

(2.11)

という条件があることがわかる（厳密にはそうでない、線形代数の本を参照）。質点の力学においてバネのポテンシャルエネルギーは変位 x でバネ定数 k として、 $kx^2/2$ となるが、式 (2.10) はこの拡張であることがわかるし、ばねで $k > 0$ であることが、式 (2.11) にやはり拡張されていることがわかる。（変形に伴うポテンシャルエネルギーが 2 次形式で、かつ釣り合いの位置が最小になるという条件は、多自由度の振動系で既に学習した内容であり、その類似性を復習されたい。例えば、ランダウ・リフシッツ「力学」23 節の式 (23.2) でポテンシャルエネルギーは $k_{ij}x_i x_j/2$ と表され、係数は $k_{ij} = k_{ji}$ という対称性があることが説明されている。）

2.2 等方性媒質の弾性定数 Elastic constants for isotropic media

前節では弾性定数 C_{ijkl} は一般には $C_{ijkl} = C_{klij}$ が存在することを示した。バネ係数は k という一つの値だったのに対して、どうしてこんなに複雑な形になっているのか、一見不思議である。地球惑星科学の多くの分野ではマクロな視点で研究をするので、通常はこんなにたくさんの弾性定数は扱わない。岩石の造岩鉱物の個々の結晶構造、さらには分子・原子レベルのようなミクロな視点を対象とした研究のみ、きちんと C_{ijkl} の意味を理解する必要がある。それでも、最近では種々の観測の精度が向上したことで、マクロな地球惑星科学の諸現象においても、考慮しないとイケない場合もあるので、この「異方性」(anisotropy) の問題を簡単に触れる。

図 2-3 の中央の図のように、岩石サンプルの両端 (x 軸方向とする) を引っ張るとする、つまり σ_{xx} のみを外力としてかけるとする。我々が普通に考える固体ならば、(a) のように外力と同じ方向に引っ張られるので、 e_{xx} として生ずる。さらに、 x 方向に伸びるのに対応して、他の 2 方向には縮むので、 e_{yy} と e_{zz} として生ずる。

は生じない。ところが、一般的な固体、例えば鉱物などでは原子が特定のパターンで配列する C_{ijkl} を持っている。層構造や柱状構造をとったり、大陸地殻ではごく普通に含まれる石英（これが大きく成長すると水晶と呼ばれる）は六面体が棒状に伸びる独特の形状を示すことは、どこかで見たことがあろう。結晶構造を取る固体は、その性質が原子配列に対応して、方向によって大きく異なる。層構造をした鉱物は層の面に沿ってと垂直方向では大きく異なるのは、直感的にもわかる。

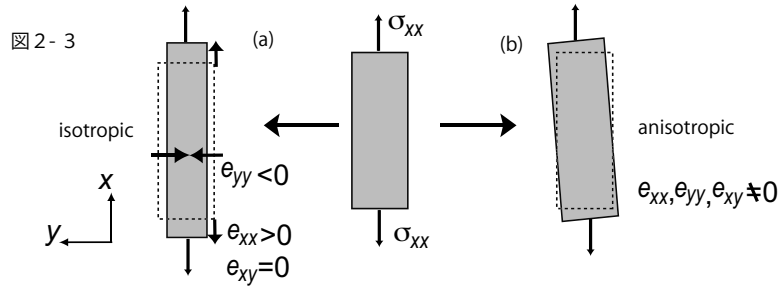


図2-3中央のような外力がかかった場合には、結晶構造を持つ一般の固体は(a)のようではなくて、一見直感とは反するが(b)に模式的に示したように、複雑に変形する。 e_{xx} は正であるが、他の歪みテンソルの成分は複雑に生じる。例えば、外力と直角な y 軸と z 軸方向の歪み成分は異なる： $e_{yy} \neq e_{zz}$ 。また、せん断歪みの成分である e_{xy} なども生じる。このような結晶構造をもつ固体の物性が方向によって異なる現象をと呼ぶ。弾性定数という力学的な性質の他に、電気伝導度や熱伝導度、光の屈折率といった物質の性質も同様に異方性が一般には存在する。

一般的な異方性のある固体の弾性定数は21個である。しかし、実際の固体、とりわけ地球惑星科学が対象とする造岩鉱物は、が成り立つなどの特徴を有する。そして、完全な対称性を有する、すなわち物性については全く方向に依存しない場合をと呼び、これが図2-3(a)に対応する。結晶構造がなく原子配列がばらばらな固体(例：ガラス)はこのような等方性を有する、つまり、である。

21個の独立な弾性定数を有する場合から、対称性が増えていくにつれて、独立な数は減少していく。対称性の性質に応じていくつかの名称があり、岩石学・鉱物学、あるいは固体物理学の教科書には、詳しく説明がある。弾性定数などのマクロの物性に関することはKarato(2008)、また、対称性の導入によって21個の弾性定数がどのように減少していくかのエレガントな説明はランダウ・リフシツ「弾性理論」10節にある。例えば、一つの面(例： xy 平面)について対称ならば(鏡で写した空間での性質が同じ) z の符号だけ逆にしても不変であり(例： $z \leftrightarrow -z$)、これは「単斜晶系」(monoclinic)と呼ばれ、弾性定数は13個となる。直交するもう一つの面(yz 面)にも対称ならば、 z に加えて $x \leftrightarrow -x$ で不変となり、「斜方晶系」(orthorhombic)と呼ばれ、9個に減少する。さらに、水晶のように一つの軸方向(例えば z 軸)についてのどの角度で回転しても性質が変わらない対称性を、「六方晶系」(hexagonal)と呼び、5個が独立な定数となる。これは、層状構造をした物質の物性に対応するので(z 軸が層の面に垂直、 xy 平面内ではどの方向でも同じ)、地球のように重力下での現象はこの効果が大きい例もある。堆積物は明らかに層構造しているし、地球内部構造として重要な例の一つとして、プレート運動しているリソスフェアの下のアセノスフェアは水平に流れているので、主要構成物質であるの変形しやすい特定の面が同じ方向に並んでいることが推定され、これが上のような結晶構造と同じ性質を持つ。地球惑星科学では、六方晶系と同じマクロな現象の物質の異方性が重要であることが多く、この性質をと呼んでいる。

最終的に対称性が高まり、あらゆる方向についての反転や回転に対しても性質が不変な場合が図2-3(a)のような等方的であり、独立な弾性定数はになる。地球惑星科学ではほとんどすべてのマクロの問題では、この等方的媒質を仮定しているのので、以下はこの場合のみを扱う。岩石を構成する鉱物のうち、等方的な結晶であるのはごく一部であり、多くは複雑な結晶系である。しかし、

。上に触れたように、最近の地球惑星科学の観測は精度が格段に向上しているので、将来的には構成物質の異方性がより重要な現象も多く検出される可能性がある。結晶構造に起因するというよりも、例えば、融けたマグマが割れ目状に同じ方向に多数入った媒質は、異方性を持つ(この場合は、transverse isotropyとなる)。

等方性媒質での2個の弾性定数について、具体的に考える。2個の弾性定数の表現は C_{ijkl} の形ではなく、扱う分野によって慣例的に扱いやすい形式の2個が定義されており、ここでは3つの場合を挙げる：

(a) 固体地球物理学で伝統的に使用されてきたラメ定数 (Lamé constants)

地震学や測地学などの分野で一般に使われている等方媒質の弾性定数は λ と μ という2つのラメ定数と呼ばれる書式である。これは、歪みエネルギーの2次形式の表現である式 (2.10) における対称性の議論 (回転や反転に対して不変な形式) から、以下のように定義される：

$$(2.12)$$

ここで、Einstein 和である添字 l, i, k については繰り返しの和であることを注意。 C_{ijkl} の形式をクロネッカーのデルタを使って示すと、

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.13)$$

となる。具体的に、6つの応力テンソルと歪みテンソルとは以下の関係になる：

$$(2.14)$$

これがバネの場合のフックの法則である $f_i = -kx_i$ と対応する、等方弾性体でのフックの法則である。地震波速度とラメ定数の関係などについては2.4節で求める。歪みエネルギーは $e_{ik} = 0$ で最小となるはずなので、式 (2.12) よりラメ定数は正である。また、式 (2.14) の最後の3つの関係式は、 μ がせん断の応力と歪みの成分を結びつけることを示している。流体ではせん断成分がないので、 $\mu = 0$ となっている。

[問題2-2] 等方弾性体での応力テンソルの各成分と変位の3成分 u_i との関係を求めよ。

(b) 岩石実験や材料工学など室内実験に適したヤング率とポアソン比 (Young modulus and Poisson's ratio)

室内実験において岩石サンプルなどから物性を測定する際には、図2-3や図2-2 (b) のような一軸引っ張り (圧縮) の実験装置を使う場合が多い。自動車部品などの強度測定など工学製品一般もこのようにして材料検定を行なう。この実験形式から直接求められる E が、このような場合の等方弾性体の2つの弾性定数となる。

図2-3 (a) のように x 軸方向に応力テンソル σ_{xx} で引っ張ると、 x 軸方向に伸びるので、歪みテンソルの一つの $e_{xx} > 0$ が生じ、これは比例関係にあり

$$(2.15)$$

と、この比例定数をヤング率 E と定義する。等方媒質なので、 x でない方向 (y または z 方向) に一軸引っ張り実験をしても、 E の値は不変なことに注意。そして、 x 軸方向に伸びると同時に、他の2方向である y と z 方向には縮む。つまり $e_{yy} < 0$ が生じ (等方媒質なのでこの2つの値は等しくなる)、この横方向の歪み成分と伸びた方向の歪み成分の比を、ポアソン比 ν と定義する：

$$(2.16)$$

[問題 2-3] 図 2-3 と式 (2.14)-(2.16) を用いて、ヤング率 E とポアソン比 ν を、2つのラメ定数を用いて表わせ。また、2つのラメ定数は正であることから、ポアソン比が取りうる値の範囲を求めよ。

(c) 地球惑星科学の物性的議論からの体積およびせん断弾性率 (bulk modulus and shear modulus)

等方媒質においては固体物理の物性論的立場から見れば、重要なのは圧力に対して体積がどの程度変化するか、そして一方でせん断成分の強度はどのくらいか、という点である。前者は気体や流体などでも最も重要な物性量の一つであり、熱力学で既に学習したはずの体積弾性率 (bulk modulus) あるいは非圧縮率 (incompressibility) という量 K である：

$$(2.17)$$

である。ここで K の逆数としたのは、右辺は「圧縮されやすさ」を示しているからである。偏微分で一定にする変数が2つあるのは、2-1節で示した式 (2.5) と (2.7) のように、断熱過程ならばエントロピー S を、等温過程ならば温度 T を一定にした場合の値だからである。

等方媒質で圧力は応力テンソルと式 (1.9) の関係がある一方で、歪みテンソルと体積変化は式 (1.25) の関係がある。ラメ定数による式 (2.14) を用いると、

$$-\Delta p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \frac{\Delta V}{V}$$

より、式 (2.17) と比べると、ラメ定数と以下の関係があることがわかる：

$$(2.18)$$

もう一つの弾性定数は、固体に特有なせん断成分であるので、ラメ定数の一つの μ を用いる。(a) の最後でも触れたように、せん断成分を表すので、 μ をとも呼ぶ。

この K と μ の組み合わせは、地球惑星内部物性学や地震学の中でも歪みによる重力変化の効果も同時に考慮しないといけない地球の自由振動 (free oscillation) の分野で用いられる。

まとめると、等方媒質には2つの弾性定数があり、研究分野によって慣例的なペアが広く用いられるが、それぞれは互いに上に示したような関係で結びついている：

$$(\lambda, \mu) \iff (E, \nu) \iff (K, \mu)$$

最後の (c) では圧力 p が現れたが、固体部分の地球惑星科学では応力テンソルは実際の値を用いるのではなく、平均的なその場 (正確には深さ) の圧力 p からのずれを用いる場合がほとんどである点を指摘する。圧力は固体地球部分では (そして大気や海洋でも全く同じ) が成立している。重力下で静止している流体を考えると、と考えてよい。断面積 S で厚さ Δz の水平においた薄い円盤を考える。密度を ρ とし、 z 軸方向の下向き (正の方向とする) に重力加速度 g がかかっていると、圧力の深さ変化 $p(z)$ を考える。円盤の上面を z として圧力 $p(z)$ は下向きにかかり、下面の $z + \Delta z$ では上向きの圧力 $p(z + \Delta z)$ がかかる。体積力としてはこの円盤にかかる重力があるので、 $\rho g dV = \rho g S \Delta z$ だけ下向きにかかる。これら3つの力が釣り合うので、

$$(2.19)$$

という重要な関係式が得られる。固体地球部分でも長時間経過すれば変形して上式の静水圧平衡が成り立つ。この式を用いて地球内部の圧力の深さ分布を推定できる。つまり、通常の状態では式 (1.9) のように、

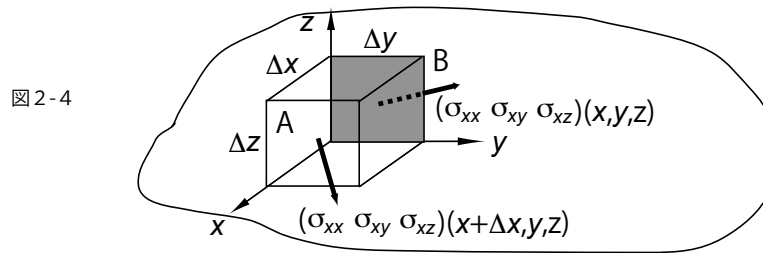
があつて、となつている。またこの値に従って、物質は圧縮されて

いて上の (c) の $\Delta V/V$ で示された量だけの歪みがたまっている。これは微小ではなく地球内部深くでは固体であっても10%を超えている。

しかし、これは「つりあいの状態」の地球内部での圧力、つまり応力テンソルの絶対値であるが、地球惑星科学の多くの場合には、この静水圧平衡を基準として、そこからずれた分の応力成分による歪みを扱う。つまり、実際の物質のその場の応力や歪みの値から、上の静水圧平衡の部分差し引いた量のみを議論する。内部を伝搬する地震波や、造山運動で地殻が盛り上がる、プレート運動でプレートが曲がるなどといった現象はすべて、このような歪みも歪みも扱い、絶対量は議論しない。よってこれを仮定することが妥当となる。これは質点が鉛直下向きにぶらさがったバネにおいても、自然長からの長さを議論するのではなく、バネが伸びたり縮んだりしてつりあって静止した位置を基準として、そこからのずれで考えればよいのと同じである。

2.3 弾性運動方程式 Elasto-dynamic equation

ばねにつないだ質点の運動方程式 $md^2x_i/dt^2 = f_i = -kx_i$ に対応する、連続体についての運動方程式を、前節までの結果からようやく求める準備が整った。質点では質量 m を考えたが、連続体では左辺は $\rho \Delta V \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ を、そして右辺は $f_i \Delta V$ (重力やクーロン力) を表現すればよい。図2-4のように、原点を一つの頂点とし、一辺の長さが $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とする微小な直方体を考える (大きな媒質の内部の一部と見なし、最後はこれらの長さをゼロに極限操作する)。媒質の密度を ρ とし、この微小直方体の体積を $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ とする。また、変位ベクトルをこれまでと同様に $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ とする。ここで、変位は場所と時間の関数である： $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ 。



x 成分の力の釣り合いをまず考える。慣性力は「質量」と「変位の2階微分 (加速度) のベクトル」であるから、

$$\rho \Delta V \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Delta x \Delta y \Delta z$$

となる。(流体のように大変形が可能な場合には、この時間微分は単純ではなく、いわゆる「オイラー微分」と「ラグランジュ微分」を区別しないといけない。弾性体の場合には微小変形なので、この2つの微分は区別しなくてもよい。3章の粘性流体を扱う部分で触れる。) 単位体積あたりの体積力を $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ とすると、

$$f_x \Delta V = f_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

となる。あとは、6つの面にかかる traction の和である。図2-4の添字 A と B に示す x 軸方向に垂直な2つの面にかかる x 成分の力をまず考える。 σ_{ij} の添字 i が x 平面を示し、 j が力の方向の単位面積あたりの力の x 成分にあたる σ_{xx} を選ぶ。添字 A の面は x の正方向を向いていて、かつ位置が $(x + \Delta x, y, z)$ で面積が $\Delta y \Delta z$ なので $\sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ と表される。これに対して B の面は x 軸の負の方向の面であり、位置が (x, y, z) なので、 $-\sigma_{xx}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z$ がかかる力となる。2つを合わせてから極限操作をすると、

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \\ & \simeq \left(\sigma_{xx}(x, y, z, t) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \sigma_{xx}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

となる。同様に、 y 軸に垂直な2つの面にかかる x 方向の単位面積あたりの力は $\sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z, t)$ と $-\sigma_{yx}(x, y, z, t)$ で、面積は $\Delta x \Delta z$ なので、

$$\sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) \Delta x \Delta z - \sigma_{yx}(x, y, z, t) \Delta x \Delta z \simeq \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

となる。 z 軸に垂直な残りの2面についても σ_{zx} に対して同様に

$$\sigma_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) \Delta x \Delta y - \sigma_{zx}(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \simeq \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

となる。

これらをすべてまとめて、(慣性力) = (6つの面力の和) + (体積力) とすると、以下となる：

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + f_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.20)$$

となる。同様に、 y 方向と z 方向にかかる力をそれぞれ考えると、

$$(2.21)$$

$$(2.22)$$

と3つの方程式が導ける。これらの式はテンソル表示に便利な添字と省略形でまとめると、以下のように簡潔に表現できる：

$$(2.23)$$

この2階の微分方程式を弾性運動方程式 (elasto-dynamic equation) と呼び、弾性体の運動を記述する。

よく使われる等方媒質でかつ一様 (homogeneous、弾性定数が場所によらずに一定) の場合には、式 (2.14) と合わせると、以下のようにまとめられる：

$$(2.24)$$

ここで、 θ は式 (1.25) に出て来た体積変化率に対応する：

$$\theta \equiv e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_{j,j}$$

なお、 ∇^2 はラプラシアン (Laplacian) である：

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

[問題2-4] 式 (2.24) を導け。

2.4 地震波速度 Seismic wave velocities

地震波には縦波である P 波と横波である S 波の2種類があること、液体では $\mu = 0$ こと、P 波速度は $v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ことなどは、既に「知識としては」学習したはずである。前節で導いた一様等方媒質についての運動方程式 (2.24) について、一般解を考えるのではなくて、物理的な直感に基づく簡単な解の形を仮定することで、このような地震波伝搬における最重要の性質を定量的に求めることができる。

弾性運動方程式の一般解をきちんと求めるには、2階の偏微分方程式なので複雑な計算が必要だが、結果は以下で示すものと全く同じである（Aki-Richardsなどに厳密な導出が示されている）。

[問題2-5] 波動伝搬に関する以下の物理量の間関係を示せ。(a) 周期 (period) T 、(b) 周波数 (frequency) f 、(c) 伝搬速度 (velocity) v 、(d) 波長 (wavelength) λ 、(e) 角周波数 (angular frequency) ω 、(f) 波数 (wavenumber) k

<注意> 最近の分光学や結晶学では、波数 k は $1/(\text{波長})$ 、すなわち「単位長さあたりに波がいくつ存在するか」の定義を用いているようである。しかし、この講義では物理などの幅広い分野で長年用いられてきた定義を用いることとする。時間においては、 f と ω という二つの量は明確に区別して用いられてきたが、空間においてはこの2つを区別するように定義されてこなかった（この講義での k は、 ω の方に対応することを確かめよ）。

[問題2-6] 時間 t と一つの方向を示す座標 x としての関数 $f(x, t)$ があるとする。 x の正の方向に速度 v で伝搬する関数は $f(x, t) = f(t - x/v)$ という形で一般的に表現されることを示せ。また、 x の負の方向に伝搬する場合には $f(x, t)$ はどのように表現されるか。

まず、等方一様媒質の場合には P 波と S 波が独立に伝搬する。お互いに干渉せずに伝搬することを波動現象では decoupled と呼ぶことが多い。こうして、一方の波だけを以下で考える。問題2-6で示したような、 x の正の方向に速度 v で伝搬する場合には、 $f(t - x/v)$ で表現される。また、角周波数 ω が与えられた正弦波である単色 (monochromatic) な波が簡単なので、以下はこれに限定する。（一般の複雑な波形の伝搬については、さまざまな値の ω の正弦波の足し合わせで表現できるので、個々の正弦波に対して下に示すような操作をした後で最終的な結果について単に足し合わせればよく、以下の結果は一般の場合にもあてはまる。この「正弦波の足し合わせ」で一般の関数形を表現するのは、フーリエ級数やフーリエ変換という非常に重要な基礎的な数学手法である、蓬田の第7章と第8章を参照）。角周波数 ω の正弦波は $\cos(\omega t)$ といった形で表わされるので、 x の正の方向に速度 v で伝搬する波は一般には $\cos(\omega(t - x/v))$ という因子がかかることになる。このままでもよいが、 \cos や \sin よりも指数関数に純虚数がかかった

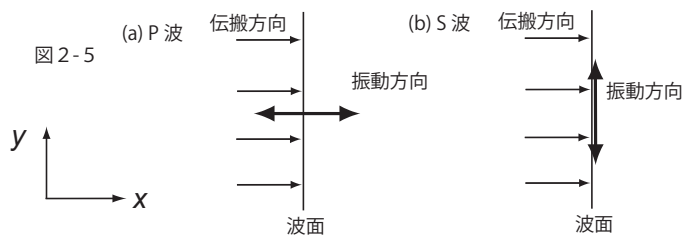
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{2.25}$$

を用いた方が演算が簡単になる（蓬田の第7章を参照）。つまり、ここでは

$$\cos(\omega(t - x/v)) = \frac{1}{2} (e^{i\omega(t - x/v)} + e^{-i\omega(t - x/v)}) \tag{2.26}$$

という因子をかけて、実際には常にこの $e^{i\omega(t - x/v)}$ と考える。

これで準備ができたので、以下ではまず P 波について考える。そこでは x 方向に伝搬する $e^{i\omega(t - x/v)}$ を仮定する。これは図2-5に示すように波面 (wavefront) が平らとして、均質媒質ならば伝搬していても波面がいつまでも平らなままである。ある点の振動の大きさとしてその最大値を「振幅」(amplitude) と呼ぶが、平面波は振幅が一定の波である。P 波は縦波なので、 x の正方向に伝搬すると、図2-5 (a) のように振動方向も x 方向のみとなる。こうして3成分 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \equiv (u, v, w)$ のうち、ゼロでないのは u のみとなる。



P波の平面波の振幅を A として、伝搬速度を α とすると、式 (2.26) の因子をかけることで、この波は以下の3成分として表わされる：

$$\begin{cases} u(x,t) = \\ v(x,t) = \\ w(x,t) = \end{cases} \quad (2.27)$$

これを等方均質媒質についての弾性運動方程式 (2.24) に代入する。波動伝搬の問題では、外力である f_i はゼロとみなす (f_i は震源などに対応)。式 (2.27) を代入すると、(2.24) の u 、つまり $i=1$ の式しか残らず、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{i\omega}{\alpha}\right) A \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= A \left(-\frac{i\omega}{\alpha}\right)^2 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} \\ \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \left(-\frac{i\omega}{\alpha}\right)^2 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (i\omega)^2 A \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} \end{aligned}$$

となるので、以下の関係が成り立つ：

$$(i\omega)^2 \rho A \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} = (\lambda + \mu) A \left(-\frac{i\omega}{\alpha}\right)^2 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\} + \mu A \left(-\frac{i\omega}{\alpha}\right)^2 \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right\}$$

$A \exp(\dots)$ の項を取り除くと、

$$-\rho\omega^2 = -\frac{\lambda + \mu}{\alpha^2} \omega^2 - \frac{\mu}{\alpha^2} \omega^2$$

となり、最終的に P 波速度 α は以下であることが示される：

$$\boxed{\hspace{15em}} \quad (2.28)$$

一方、S波は振動方向が伝搬方向と直交する横波なので、図 2-5 (b) のように y 軸方向のみに成分があるとす。S波の伝搬速度を β とし、伝搬の指数関数の因子などは P 波と同じで、振幅を B とすると、

$$\begin{cases} u(x,t) = \\ v(x,t) = \\ w(x,t) = \end{cases} \quad (2.29)$$

と表される。これを式 (2.24) に代入すれば、最終的に S 波速度は

$$\boxed{\hspace{15em}} \quad (2.30)$$

と表される。 λ も μ も正なので、 $\alpha > \beta$ と P 波の方が速いことがわかる。また、流体では $\mu = 0$ なので、P 波は存在するが、 $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ ことがわかる。地球内部の岩石は大まかには $\lambda \simeq \mu$ であるので、 $\alpha \simeq \sqrt{3}\beta \simeq 1.7\beta$ となっている。

[問題 2-7] 上の S 波速度を導け。また、体積変化率である θ の値はどうなっているか。