

簡単な Recursive フィルター

斎藤正徳* 石井吉徳**

Simple recursive filter.....By Masanori SAITO and Yoshinori ISHII Design method of simple recursive filters is discussed. These filters are characterized by only two constants; central frequency and band width. Examples are presented to demonstrate their effectiveness in band cut filtering and spectral analysis. This type of filters may be useful for routine processing because of its simpleness and high speed.

1. 緒 言

フーリエ変換を能率良く行なら Cooley-Tukey の方法が発明されて以来、バンドパスなどのフィルターはもちろんのこと、本来は時間軸上で定義された演算である相関係数、コンボリューションなども周波数領域で計算することが多くなった。しかしだからと言って時間軸上のフィルターが周波数領域でのものより劣っているかと言うとそうでもない。このことは次の様な計算をしてみるとよく分る。

$N = 2^n$ 個のデーターが与えられているときに、このデーターのすべてのフーリエ係数を求めるには $2nN$ 回の積和の計算が必要である (Cooley and Tukey, 1965)。従って周波数領域でフィルターを行ない、これを再び時間軸上に戻すには $4nN$ 回の演算量が必要となる。ここで注意しなければならないのは、上にあげた演算数は、複素数の積和の演算を単位にしているということである。1回の複素数の掛け算は4回の実数の掛け算に相当するから、もし実数の積和の演算を単位にするならば、先にあげた数値は $16nN$ に訂正されねばならない。もう一つの注意は、上の演算量には三角函数の計算に必要な演算量が含まれていないということである。普通1回の三角函数の値を計算するのに最低4回の掛け算を必要とするから、Cooley-Tukey 法を1回用いる度に $8nN$ 回の演算が必要となる。以上のことから周波数領域でのフィルターにはほぼ $64nN$ 回の演算が必要であることがわかる。

一方 m 個の係数をもつ時間軸上のフィルターに必要

な演算の総数は mN 個である。よって $64 n/m$ の大小によって、周波数領域でのフィルターと、時間軸上のフィルターの優劣が決ることになる。仮に $N = 1000 \approx 2^{10}$ とするとこの比は $640/m$ となって $m < 640$ なら時間軸上、 $m > 640$ なら周波数軸上のフィルターの方が有利になる。 $m \approx 640$ と言った長いフィルターが必要となる場合は余りないと思われるから、一般的に言って、時間軸上のフィルターの方が有利であると言えよう。またデーターの N 個数がふえればふえるほど、時間軸上のフィルターの方が有利になる点も見逃すことができない。

もちろん周波数領域で行った方が便利な場合も数多くある。たとえば理想的なバンド・パス・フィルターは周波数領域では最も簡単に実現可能なもの一つである。その他周波数特性が非常に複雑な場合や、精密な周波数特性を得たいと言った場合には、フィルターを時間軸上で設計すると非常に手間がかかるとか、たとえ得られたとしても非常に長いフィルターになることが多い。このようなときには、周波数領域で行った方が便利である。従って時間軸上におけるフィルターに要求されるのはその精度ではなく高速性と簡単さである。

時間軸上のフィルターには普通の Non-Recursive なフィルターと Recursive フィルターがある。後者は時刻 t における出力を、 t 以前の入力と出力とから計算するもので、電気回路との類推でいふと、フィードバック回路に相当する。このようなフィルターの最大の特長は、少い係数で所望の特性をもったフィルターを実現できると言う点でこのことは上に述べた高速性と簡単さの条件とを満たすものである。この論文では Recursive なフィルターのうちでも特に簡単な形をしたフィルターの設計について述べる。

昭和44年10月6日受理

* 東京大学 理学部 地球物理学教室

** 石油開発公団 事業本部 物理探鉱部

2. Recursive フィルターの理論について

デジタル・フィルターの詳しい理論は適當な論文 (Shanks, 1967; Radar and Gold, 1967) に譲ることにし、ここでは必要最少限の公式をあげるだけにする。

いま x_t を入力, f_s をフィルターの係数, y_t をこのフィルターの出力とすると、これらの間には

$$y_t = \sum_s f_s x_{t-s} \quad (1)$$

の関係がある。いま

$$F(z) = \sum_t f_t z^t$$

$$X(z) = \sum_t x_t z^t \quad (2)$$

$$Y(z) = \sum_t y_t z^t$$

によって z 変換を定義すると(1)式は

$$Y(z) = F(z) X(z) \quad (3)$$

と書き直せる。

z 変換はフーリエ変換と同等なものである。例えば $F(z)$ をその単位円上, $z = e^{-i\omega t}$ で計算したものと同じ記号 $F(\omega)$ で表わすと,

$$F(\omega) = \sum_t f_t e^{-i\omega t}$$

となり、これは f_t のフーリエ変換に他ならない。 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ はそれぞれ入出力のスペクトル, $F(\omega)$ はフィルターの周波数特性である。また(3)式はコンボリューションのフーリエ変換に関するよく知られた公式と同等である。

いま特別な例として入力が b_t ($t = 0, 1, \dots, N$) であるときに出力が A_t ($t = 0, 1, 2, \dots, M$) となるようなフィルターを求めるなどを考える。 a_i, b_i の z 変換を $A(z)$, $B(z)$, また求めるフィルターの z 変換を $F(z)$ とすると、入出力の関係式(3)によって

$$A(z) = F(z) B(z) \quad (4)$$

が成り立たねばならない。よって $F(z)$ は

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_M z^M}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_N z^N} \quad (5)$$

のように求められる。時間軸上で(1)のようなフィルターの z 変換が、あるいは z^{-1} の多項式で表わされるのに對して、(5)で求めたフィルターの z 変換はの有理式で表わされている。

a_i, b_i が与えられて(5)によって $F(z)$ が得られたときに、このフィルターの出力を計算するのは二通りの方法がある。

第一の方法ではまず $F(z)$ を z の巾級数

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f_t z^t \quad (6)$$

に展開する。この級数の係数 f_t が収束するためには $F(z)$ の極、すなわち $B(z)$ の零点が全て単位円の外になければならない。この条件はまた $B(z)$ が Minimum Phase であるための条件とも呼ばれるが、この条件が成立するとすれば(1)によりフィルターの出力は

$$Y_t = \sum_{s=0}^{\infty} f_s x_{t-s} \quad (7)$$

によって計算される。もちろん実際の計算に当っては f_s が適当に小さくなつて打切るのである。

第二の方法ではまず z 変換で書かれた入出力の関係(3)に(5)で求められた $F(z) = A(z)/B(z)$ を代入して

$$B(z) Y(z) = A(z) X(z)$$

を求め、両辺の積を時間軸上のコンボリューションに直した

$$b_0 y_t = \sum_{s=0}^M a_s x_{t-s} - \sum_{s=1}^N b_s y_{t-s} \quad (8)$$

から y_t を求める。この式は y_t に関する漸化式になっているので、このような形のフィルターを Recursive なフィルターと呼ぶ。漸化式(8)が $t \rightarrow \infty$ で安定になるためには先と同じく $B(z)$ が Minimum Phase であれば良い。Recursive なフィルターの方が(7)式のような Non-recursive なフィルターよりもずっと少い計算量ですむ。たとえば、

$$F(z) = \frac{1}{1 - 0.5z} = 1 + 2^{-1}z + 2^{-2}z^2 + \dots$$

というフィルターの出力を32ビットの精度で計算するためには、(7)式では32回の演算が必要であるのに対して、(8)式では僅か1回の計算ですむ。

普通の目的には $M = N = 2$ 程度の最も簡単なフィルターでも十分実用になる。このようなフィルターの変換は一般的に

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z_p - \gamma z)(z_p - \bar{\gamma}z)}{(z_p - qz)(z_p - \bar{q}z)} \\ &= \frac{1 - 2\gamma \cos \omega_p z + r^2 z^2}{1 - 2q \cos \omega_p z + q^2 z^2} \end{aligned}$$

$$Z_p = e^{-i\omega_p}, Z_p = e^{-i\omega_p}$$

と書くことができる。ここで $(1/q)e^{\pm i\omega_p}$ は $F(z)$ の極であるから、漸化式(8)が安定であるためには $|q| < 1$ でなければならない。

(9)式の中には q, r, ω_p, ω_z の4個のパラソーターが含まれていて、これらの値を調整することによって色々な特性をもつフィルターが得られる。たとえば $r = 1$ とすると $F(z)$ は $z = z_p$ で0となるから、フィルターの

Band Cut (Notch) Filter

ある特定の周波数 ω_0 の波を完全に除きたい場合がある。このときには z 変換として

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z_0 - z)(z_0 - \bar{z})}{(z_0 - qz)(z_0 + qz)} \\ &= \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z + z^2}{1 - 2q \cos \omega_0 z + q^2 z^2} \\ z &= e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

を考え
もし
くなり
フィル
いき
て、m
| $F(a)$
1
が得
ころ
条件
とな
メー
とな
が分
20
が厳
りた
して
とな
であ
の因
に材
るよ
すか
けれ
分派
イバ

をえらべば良い。この周波数特性は確かに $\omega = \pm \omega_0$ で 0 になる。バンドの幅 $\Delta\omega$ から q を求めるには次のような近似を用いる。

$\omega = \omega_0$ の附近だけを考えると

$$\left| \frac{z_0 - z}{z - qz} \right|$$

はほとんど定数と考えてよい。従って $\omega = \omega_0$ 附近では

$$|F(\omega)|^2 \propto \frac{\{1 + \cos(\omega - \omega_0)\}^2 + \sin^2(\omega - \omega_0)}{\{1 - q \cos(\omega - \omega_0)\}^2 + q^2 \sin^2(\omega - \omega_0)}$$

となる。low-cut フィルターで行なったと同じように、 $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ で上にあげた函数がその最大値の $1/2$ になるよう q を求めると

$$q = \frac{\cos \Delta\omega}{1 + \sin \Delta\omega} \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

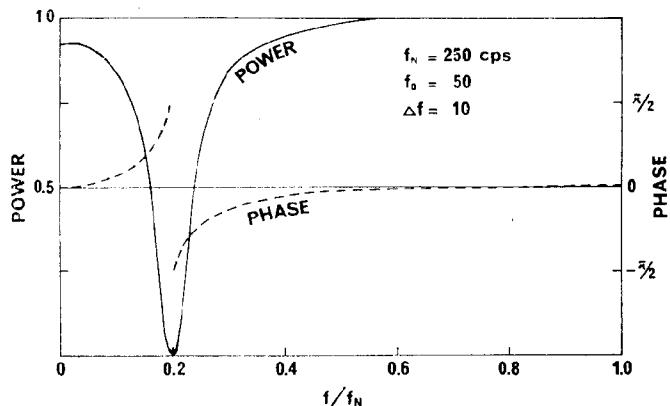
が得られる。フィルターのゲインの極大値は

$$|F(0)| = \frac{(1 + \sin \Delta\omega)(1 - \cos \omega_0)}{1 - \cos \Delta\omega \cos \omega_0}$$

$$|F(\pm\pi)| = \frac{(1 + \sin \Delta\omega)(1 + \cos \omega_0)}{1 + \cos \Delta\omega \cos \omega_0}$$

である。

このようにして得られたフィルターの一例を第2図に



第2図 バンド・カット・フィルターの例

示す。 $\Delta t = 2\text{ms}$ とすると、 $f_0 = 50 \text{ cps}$, $\Delta f = 10 \text{ cps}$ である。期待通りに $f = 50 \pm 10 \text{ cps}$ でパワー・トランスファーが最大値の $1/2$ になっていることが分る。

海上地震探鉱の反射法の場合、海表面と海底面の間の重複反射の影響で、反射法の記録にある特定の周波数が極めて卓越し解析できぬことが屢々ある。このような場合の記録の例を第3図(A)に示してある。このようなときには、ここで考えた notch フィルターを用いてこの卓越した周波数を取り除くと良い結果が得られることが多い。第3図(B)は(A)にこの種のフィルターをかけた結果で、反射波が(A)に比べて際立っているのが分る。

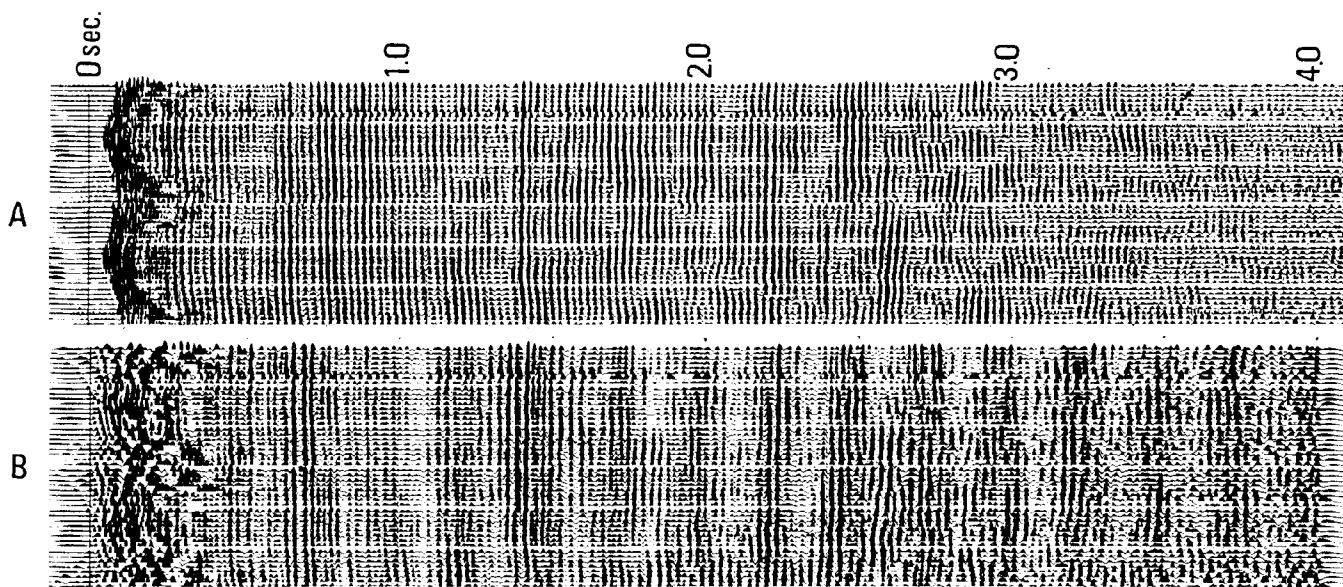
Resonator

z 変換として

$$F(z) = \frac{1}{(z_p - qz)(z - qz)}$$

$$= \frac{1}{1 - 2q \cos \omega_p z + q^2 z^2}$$

$$z = e^{-i\omega_p t} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$



第3図 Notch フィルターの効果
A) フィルターなし
B) フィルター使用

を考えると、この関数は $z = (1/q)e^{\pm i\omega_p t}$ に極をもつ。もし $q \neq 1$ であれば $|F(\omega)|$ は $\omega = \pm \omega_p$ で非常に大きくなり、従ってこのフィルターは幅の狭いバンドパス・フィルターとなる。

いま仮に $\omega = \omega_p$ で $|F(\omega)|$ が極大値をとるとして、notch フィルターと同じ方法で、 $|F(\omega_p \pm \Delta\omega)|^2$ が $|F(\omega_p)|^2$ の $1/2$ となるという条件から q を求めると、

$$1/q = 1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} + 2 \sin \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2}} \dots \text{①}$$

が得られる。しかし実際には $|F(\omega)|$ の極大は ω_q のところにはない。そこで $\omega = \pm \omega_0$ に極大値がくると言う条件から ω_p を求めると、

$$\cos \omega_p = \frac{1}{1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega_0 \dots \text{②}$$

となる。①, ②により ω_0 , $\Delta\omega$ を与えると①式中のパラメーターが全部決る。バンドの中心におけるゲインは

$$|F(\omega_0)| = \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) [(1-q^2)^2 \cos^2 \omega_0 + (1+q^2) \sin^2 \omega_0]^{-1/2} \dots \text{③}$$

となり、 q が 1 に近づくほど鋭いフィルターとなることが分る。

①-③のフィルターでは $\omega = 0, \pi$ のところで $|F(\omega)|$ が厳密には 0 にならない。高、低周波数領域を完全に切りたいときには①に $1-z^2$ をかければ良い。このようにして求めたフィルターは

$$F(z) = \frac{1+z^2}{1-2q \cos \omega_p z + q^2 z^2}$$

$$\cos \omega_p = \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} \right) \cos \omega_0$$

$$1/q = 1 + 2 \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2} + 2 \sin \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\Delta\omega}{2}} \dots \text{④}$$

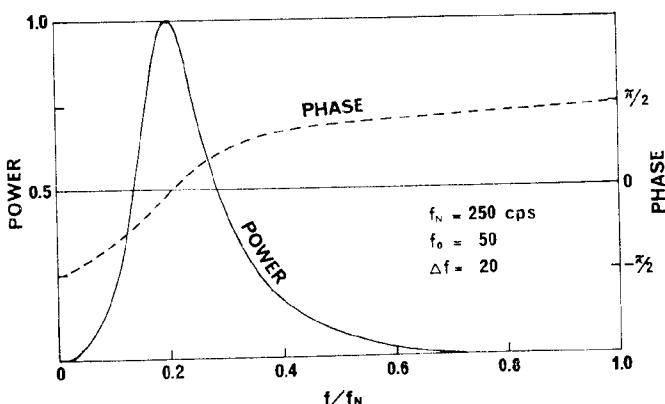
となる。またゲインの最大値は

$$|F(\omega_0)| = \frac{2}{1-q^2} \dots \text{⑤}$$

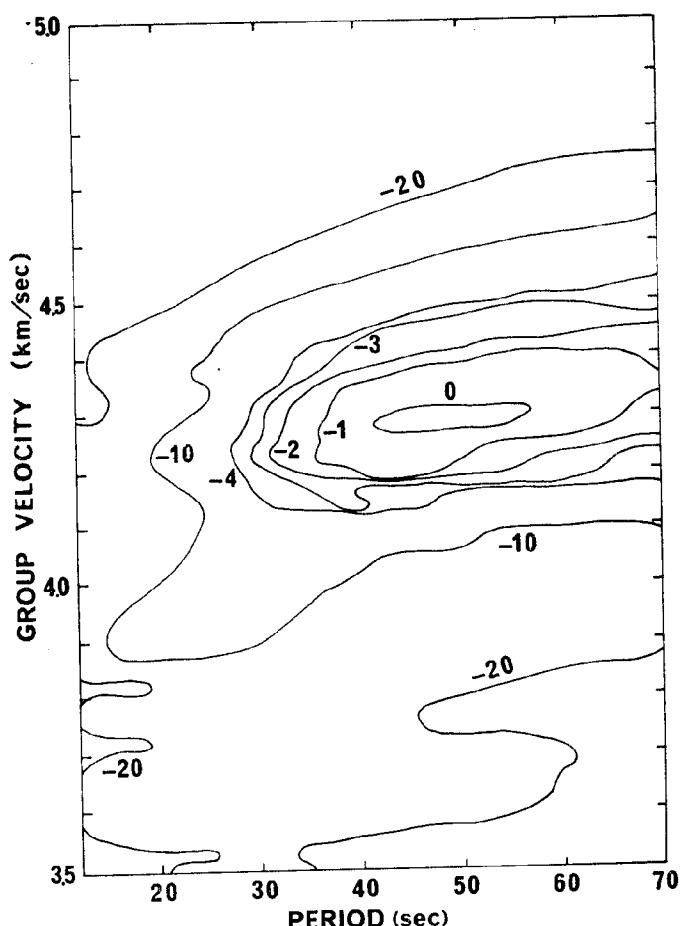
である。

④で与えられるフィルターの一例と第4図に示す。この図は $\Delta t = 2\text{ms}$ とすると、 $f_0 = 50 \text{ cps}$, $\Delta f = 20 \text{ cps}$ に相当する。

このような非常に鋭いバンドパス・フィルターを用いると記録のソナグラムを簡単に計算することができる。すなわち中心波数 f_0 のフィルターの出力の時刻 t における振幅は、時刻 t に到着した波のうち周波数 f_0 の成分波の振幅に比例するから、中心周波数を色々変えたフィルターに対する出力を計算することによって、ある時



第4図 Resonator の例



第5図 ソナグラムの例

刻にはどのような周波数の波がどれ位到着するかを見る事ができる。第5図はアリューシャンに起きた地震によるラブ波をこの方法で解析したもので、横軸は波の周期、縦軸は波の群速度で、対応する周期、速度の波のパワースペクトルのセンターをほぼ 1 db 毎に描いてある。パワーの極大の位置をつなぐとラブ波の群速度の分散曲線が得られるが、これは他の方法で求めたものと一致する。

4. まとめ

以上にあげたフィルターは非常に簡単なものであり、

その特性も限られている。しかし1個の出力の計算にたかだか4回の掛け算しが必要としないと言う点が大きな特長である。一般のバンド・パスやバンド・ストップのフィルターではバンドの端の特性に非常な高精度は要求されないから、ここにあげたフィルターでも十分実用になるであろう。またこれらのフィルターをいくつかつなぐことによって、ある程度複雑な特性をもったフィルターを作ることもできる。しかし時間軸上のフィルターの設計にはあまり凝るべきではなく、そのような複雑なフィルターは周波数領域で行なうべきであろう。

謝辞 アリューション地震の記録は東京大学金森博雄・阿部勝征氏にお借りした。また第3図の処理については石油開発公団事業本部のデータープロセス関係の方々にお世話をになった。

参考文献

- Rader, C. M., and B. Gold, Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, Proc. IEEE, **55**, 149-171, 1967.
Shanks, J. L., Recursion Filters for Digital Processing, Geophysics, **32**, 33-51, 1967.