

Fig 1: analog Butterworth filter (low-pass)

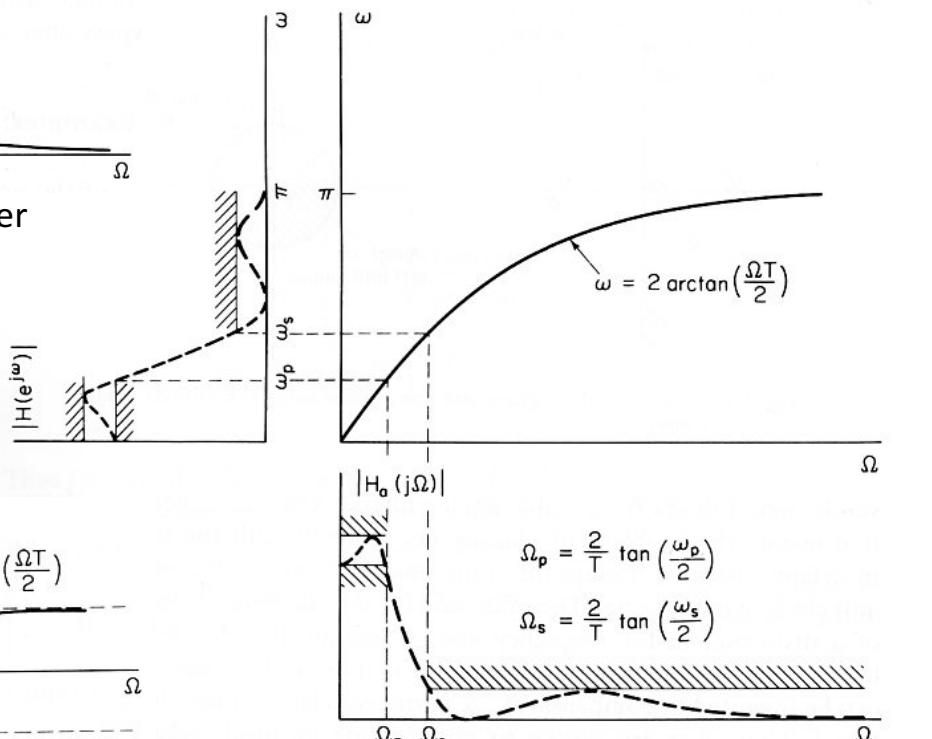


Fig 2: bilinear transform

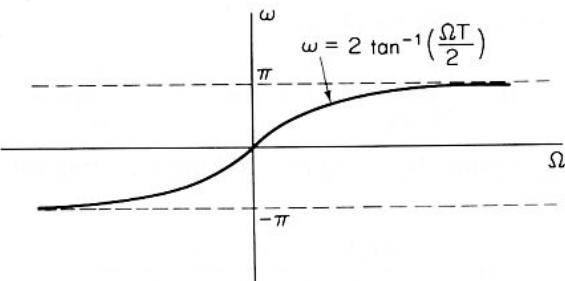
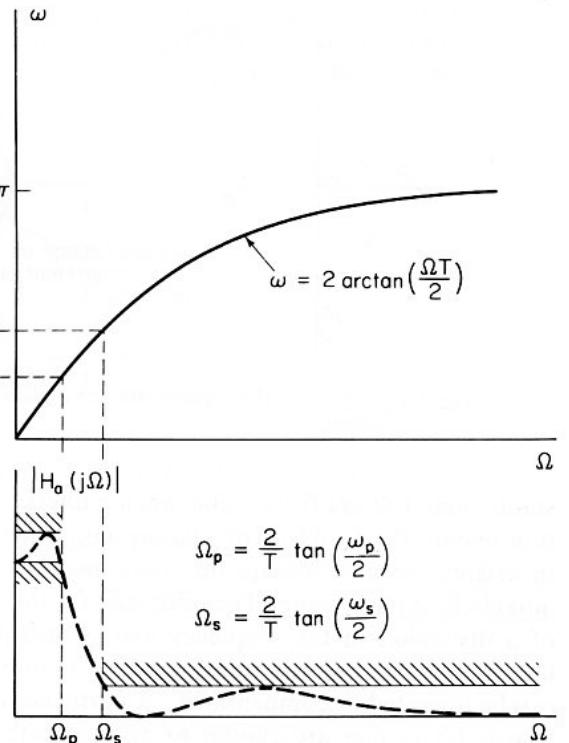


Fig 3: parameters of filter designs

$$\Omega \rightarrow \sigma \quad \omega \rightarrow \omega \Delta t$$

$$Z^{-1} \rightarrow Z$$

Fig 4: relationship between analog and digital filters via bilinear transform



TRANSFORMATIONS FROM A LOWPASS-DIGITAL-FILTER PROTOTYP OF CUTOFF FREQUENCY θ_p

Filter Type	Transformation	Associated Design Formulas
Lowpass	$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{desired cutoff frequency}$
Highpass	$-\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \theta_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_p - \theta_p}{2}\right)}$ $\omega_p = \text{desired cutoff frequency}$
Bandpass	$-\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \cot\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\theta_p}{2}$ $\omega_2, \omega_1 = \text{desired upper and lower cutoff frequencies}$
Bandstop	$\frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \tan \frac{\theta_p}{2}$ $\omega_2, \omega_1 = \text{desired upper and lower cutoff frequencies}$

Derivation of the bilinear transfrom for digital filter designs

ここでは、一階常微分方程式の数値的解法としての導出を考える：

$$a_1 \frac{y_a(t)}{dt} + a_0 y_a(t) = b_0 x(t) \quad (1)$$

$y_a(t)$ について、 $x_a(t)$ という非齊次項（つまり入力）に対する解を考える。まず、解析解としてフーリエ変換を用いる。ここで定義は（変数を通常の ω ではなく、アナログフィルタで使用した σ とした）以下のように、一階微分は

$$y_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_a(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma, \quad \frac{y_a(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\sigma) Y_a(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma$$

となる。 $x_a(t)$ と $X_a(\sigma)$ についても同様である。これを方程式(1)に代入すると、

$$-i\sigma a_1 Y_a(\sigma) + a_0 Y_a(\sigma) = b_0 X_a(\sigma)$$

つまり、この方程式に対応するアナログフィルタは以下のようである：

$$H_a(\sigma) \equiv \frac{Y_a(\sigma)}{X_a(\sigma)} = \frac{b_0}{a_0 - i\sigma a_1} \quad (2)$$

これに対して、方程式(1)の数値的な近似（ Δt 毎に $y_a(n\Delta t) \equiv y(n)$ と離散化するため）の解を以下の求める。 $t = n\Delta t$ と $t_0 = (n-1)\Delta t$ との解の関係は以下のようになる：

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t \frac{dy_a(\tau)}{d\tau} d\tau + y_a(t_0) \longrightarrow y(n) = \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{dy_a(\tau)}{d\tau} d\tau + y(n-1)$$

この積分について、 Δt が十分小さいとして、被積分関数をその平均値で近似すると

$$y(n) \simeq \frac{[y'_a(n\Delta t) + y'_a((n-1)\Delta t)]}{2} \Delta t + y(n-1)$$

となり、二つの微分の値を微分方程式(1)により $y_a(t), x_a(t)$ で置き換えると、

$$y(n) - y(n-1) \simeq \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{-a_0 y(n) + b_0 x(n)}{a_1} + \frac{-a_0 y(n-1) + b_0 x(n-1)}{a_1} \right]$$

この両辺を z 変換して、 $y(n-1) \rightarrow zY(z)$ などを用いると、上式は以下のようになる：

$$(1-z)Y(z) \simeq \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{a_0}{a_1}(1+z)Y(z) + \frac{b_0}{a_1}(1+z)X(z) \right] = \frac{\Delta t}{2a_1}(1+z)[-a_0 Y(z) + b_0 X(z)]$$

よって、方程式(1)のデジタルフィルタは以下のように z 変換として表現される：

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{a_0 + \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z}{1+z} a_1} \quad (3)$$

これとアナログフィルタの結果(2)と対応させると、双一次変換が導かれる：

$$H(z) \equiv [H_a(\sigma)]_{\sigma=\dots} \longrightarrow \sigma = \frac{2}{i\Delta t} \frac{z-1}{z+1} \quad (4)$$

[参照文献]

A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer (1975). *Digital Signal Processing*, Prentice Hall.