An example of digital filter designs to meet a given condition

Butterworth フィルタを例にとると、次数 n を適切に選択しなくていけない。n が小さければ特性は悪く、$n \to \infty$ で理想的なフィルタとなるが（Fig. 1)、必要な記録長が無限となり、計算効率も落ちる。フィルター特性の許容範囲の指定により、最適な（より正確には最小値の）n を定めることができる。以下では、基本となる low-pass filter について、Fig. 3 で指定される 4 つのパラメター（pass band の帯域 σ_p と乱れ δ_1、stop band の帯域 σ_s 乱れ δ_2）を指定した場合の、アナログ、およびその bilinear tranform によるデジタルフィルタを求める（斎藤 (1978）では異なった指定を採用しているので注意)。

4 つのパラメターはアナログフィルタ $H(\sigma)$ では、以下のように表される：

$$\begin{cases} 1-\delta_1 \leq |H(\sigma)| \leq 1+\delta_1 & (|\sigma| \leq \sigma_p) \\ |H(\sigma)| \leq \delta_2 & (|\sigma| \geq \sigma_s) \end{cases} \tag{1}$$

例として、passband は $\omega_p \Delta t = 0.2\pi$ で 1 dB（デシベル）以上、stopband は $\omega_s \Delta t = 0.3\pi$ で 15 dB 以下と指定する。つまり、

$$20\log_{10}|H_a(\sigma_p)| \geq -1, \qquad 20\log_{10}|H_a(\sigma_s)| \leq -15$$

が満たすべき条件である（この段階でアナログフィルタを $H_a(\sigma)$ と明記)。bilinear transform でデジタルフィルタに対応させると、この条件は以下となる：

$$20\log_{10}\left|H_a\left(\frac{2}{\Delta t}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right)\right)\right| \geq -1, \qquad 20\log_{10}\left|H_a\left(\frac{2}{\Delta t}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right)\right)\right| \leq -15$$

Butterworth フィルタ $|H_a(\sigma)|^2 = 1/((\sigma/\sigma_c)^{2n}+1)$ に代入し、上での 2 つの等号は以下となる：

$$1+\left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\sigma_c \Delta t}\right)^{2n} = 10^{0.1}, \qquad 1+\left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\sigma_c \Delta t}\right)^{2n} = 10^{1.5} \tag{2}$$

よって、求める Butterworth フィルタの次数 n は

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log_{10}[(10^{1.5}-1)/(10^{0.1}-1)]}{\log_{10}[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)]} = 5.30466 \tag{3}$$

この値で等号を満たすが、n は整数なので式 (3) より大きく最小の $n=6$ がフィルタの条件を満たすこととなる。もう一つのフィルタのパラメタ σ_c は、上の 2 つから決まるが、$n=6$ としたので一方しか満たさない。ここでは、式 (2) の後者の stop band 側の条件の方を満たすすると、$\sigma_c \Delta t = 0.76622$ となる（以下でこの値を α と記す)。

n と σ_c の値が求まったので、アナログフィルタの形式から bilinear transform によって、z 変換のデジタルフィルタを書き下せば良い。以下では、このフィルタの具値的な形を示す。$n=6$ なのでアナログフィルタの形式としては、次のようになる：

$$H(\sigma) = \prod_{k=1}^{6} \frac{1}{e^{i\theta_k} - i\sigma/\sigma_c}$$

$$= \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{i\frac{3\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{-i\frac{3\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{i\frac{5\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{-i\frac{5\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)}$$

ここで、$n=6$ で、$k=1,\cdots,6$ なので、

$$\theta_k = \frac{2k-n-1}{2n}\pi \;\longrightarrow\; \frac{2k-7}{12}\pi = \pm\frac{5}{12}\pi,\ \pm\frac{3}{12}\pi,\ \pm\frac{1}{12}\pi$$

上の式の σ から bilinear transform より、デジタルフィルタの z による表現に変換する。例えば、分母の最初の 2 つの項の積は以下のようになる：

$$\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - i\frac{\sigma}{\sigma_c}\right) = \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - \frac{2}{\alpha}\frac{z-1}{z+1}\right)\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - \frac{2}{\alpha}\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$= \frac{4}{\alpha^2(z+1)^2}\left((z-1) - \frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}(z+1)\right)\left((z-1) - \frac{\alpha}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}(z+1)\right)$$

$$= \frac{4}{\alpha^2(z+1)^2}\left[\left(1+\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha^2}{4}\right) - 2\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)z + \left(1-\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha^2}{4}\right)z^2\right]$$

$$= \frac{4}{\alpha^2}\frac{1.88688}{(1+z)^2}(1-0.9044z+0.2155z^2)$$

同様にして、分母の残りの 2 組も計算してまとめると、以下のようなデジタルフィルタとなる：

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z)^6}{(1-0.9044z+0.2155z^2)(1-1.0106z+0.3583z^2)(1-1.2686z+0.7051z^2)}$$

求められたフィルタ（$z=e^{i\omega\Delta t}$）では、0.2π で 0.5632 dB で、0.3π ではちょうど 15 dB となっている。後者に合わせるようにパラメター σ_c を決めたので、設定値となったのに対して、前者が設定値と異なっているのは当然である。ただし、設定した 1 dB より確実に小さくなっている（$n=6$ と本来より大きな値を用いたため）。

実際には上の形よりも、分母を 3 つに因数分解した z が 2 次の有理関数を 3 段階で用いた方が簡便であるし、数値計算での桁落ちなども少なく正確である。

Transformation from a low-pass filter to other kinds of filters

ここでは、原型となる low-pass digital filter（z 変換の形式、$z=e^{i\theta\Delta t}$ と元の周波数を θ とする）から別の種類のフィルタへの”rotational transform”を簡単に説明する（厳密な証明は専門的なので、結果のみを一部では示す）。つまり、low-pass フィルタ $H_l(z)$ から別の種類（high-pass, band-pass, band-stop、または別の周波数帯の low-pass など）のフィルタ $H_d(Y)$ への変換で、$Y\equiv e^{i\omega\Delta t}$ という変数を用いる。二つの変数 z, Y の変換 G、およびフィルタの対応は、以下のように定義する：

$$z = G(Y) \quad \text{or} \quad Y = G^{-1}(z) \;\longrightarrow\; H_d(Y) = H_l(G^{-1}(z)) \tag{1}$$

式 (1) の最初の関係は、2 種類の新旧の周波数で示すと、

$$e^{i\theta\Delta t} = \left|G(e^{i\omega\Delta t})\right| \exp\left(i\arg(G(e^{i\omega\Delta t}))\right) \;\longrightarrow\; \theta\Delta t = \arg(G(e^{i\omega\Delta t}))$$

ここで、複素 z 平面でも Y 平面でも単位円が対応するが、ゼロや極などの配置（因果律とも関係）が同じになるように、z での単位円内の領域は Y の単位円内に変換（射影）されないといけない。フィルタと同様に、この条件を満たす変換は係数 a_k, b_k による有理関数で表される：

$$G(Y) = \frac{\sum b_k Y^k}{1 + \sum a_k Y^k}$$

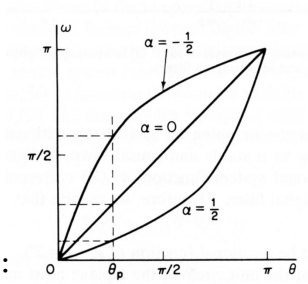
証明は Oppenheim and Schaffer (1975) などの専門書で参照し、ここでは天下りで上の条件を満たすには以下の形式となる：

$$G(Y) = \pm \prod_{k=1}^{m} \frac{Y - \alpha_k}{1 - \alpha_k Y} \quad \text{with} \ \ |\alpha_k| < 1 \tag{2}$$

ここで、変換のパラメターは $m, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ であり、low-pass フィルタから各種フィルタへの変換の際のパラメターの値は、別紙の表のようになる（表では大文字 Z^{-1} が新しいフィルタの変数にあたる）。

一例として、元の low-pass フィルタ（境界の周波数が θ_p）から別の ω_p の周波数の low-pass フィルタへの変換を考える。表より $m = 1$ で、

$$\alpha = \frac{\sin\left((\theta_p - \omega_p)\Delta t/2\right)}{\sin\left((\theta_p + \omega_p)\Delta t/2\right)}$$



であり、新旧の変数（z, Y）の変換は以下のようになる：

$$z = G(Y) = \frac{Y - \alpha}{1 - \alpha Y} \longrightarrow e^{i\theta\Delta t} = \frac{e^{i\omega\Delta t} - \alpha}{1 - \alpha e^{i\omega\Delta t}}$$

よって、新旧の周波数（θ と ω）は以下の関係にある（右図参照）：

$$\tan(\omega\Delta t) = \frac{(1 - \alpha^2)\sin\theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2)\cos\theta}$$

具体的な例として、low-pass から high-pass フィルタへの変換を求めてみる。元のフィルタはチェビシェフ型で $\theta_p \Delta t = 0.2\pi$ とすると、以下で与えられる：

$$H_l(z) = \frac{0.001836(1 + z)^4}{(1 - 1.5548z + 0.6493z^2)(1 - 1.4996z + 0.8482z^2)}$$

求める high-pass フィルタの境界の周波数を $\omega_p \Delta t = 0.6\pi$ とすると、変換の表より、パラメターは一つで

$$\alpha = -\frac{\cos\left((\theta_p + \omega_p)\Delta t/2\right)}{\cos\left((\theta_p - \omega_p)\Delta t/2\right)} = -0.38197$$

となる。元の変数を Y として、表よりデジタルフィルタ $H_h(z)$ が以下のように求められる：

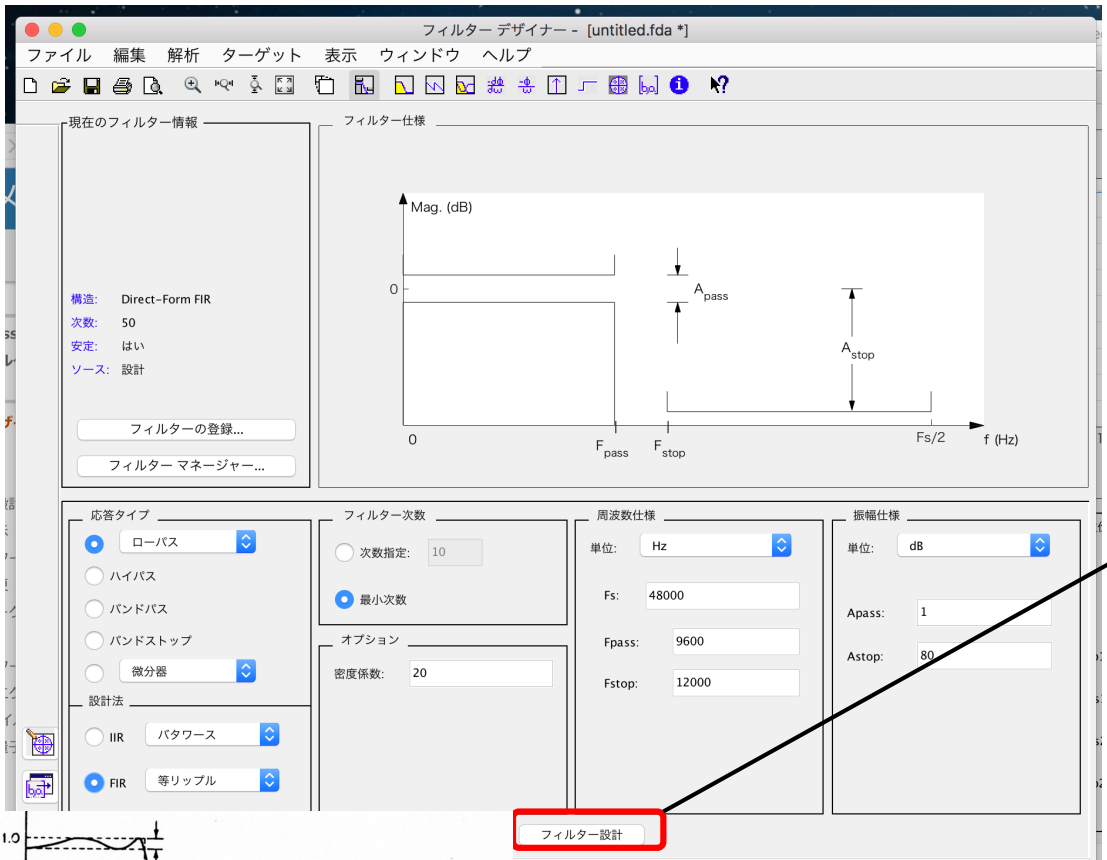
$$H_h(z) = [H_l(Y)]_{Y = -\frac{z+\alpha}{1+\alpha z}} = [\cdots]_{Y = -\frac{z - 0.38197}{1 - 0.38197 z}}$$

$$= \frac{0.001836\left(1 - \frac{z+\alpha}{1+\alpha z}\right)^4}{\left[1 + 1.5548\frac{z+\alpha}{1+\alpha z} + 0.6493\left(\frac{z+\alpha}{1+\alpha z}\right)^2\right]\left[1 + 1.4996\frac{z+\alpha}{1+\alpha z} + 0.8482\left(\frac{z+\alpha}{1+\alpha z}\right)^2\right]}$$

分子・分母に $(1 + \alpha z)^4$ をかけて、それぞれを計算すると high-pass フィルタが得られる：

$$H_k(z) = \frac{0.02426(1 - z)^4}{(1 - 1.0416z + 0.4019z^2)(1 - 0.5561z + 0.7647z^2)}$$

Matlabによるフィルタデザイン： Signal Processing Toolbox の追加購入が必要
（地震学研究室のサーバのにはある！）
コマンドラインでただ、　>> filterDesigner　と入力すると、、、



このwindowが出てくるので、フィルタの種類やパラメタを選択するだけ

ここを最後にクリックすると

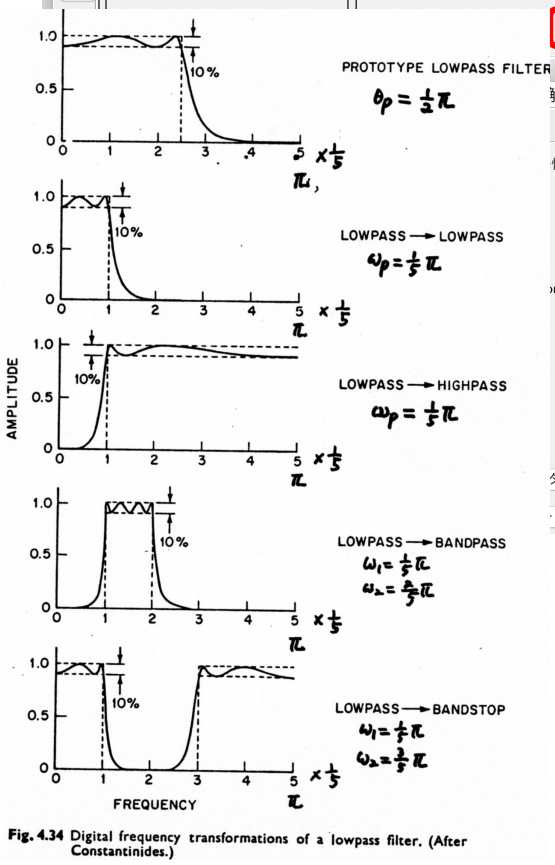
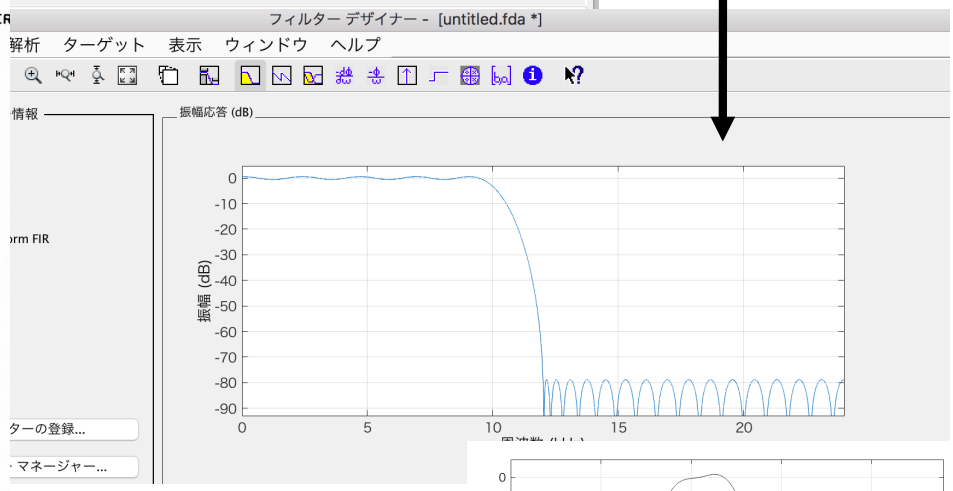
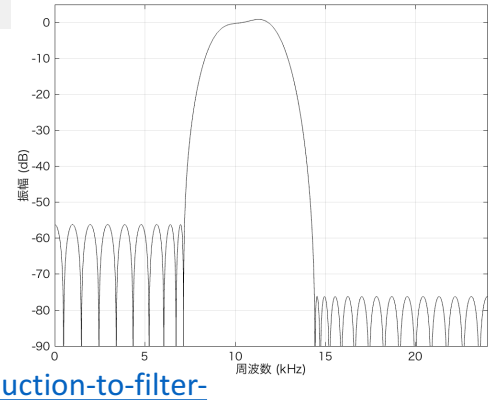


Fig. 4.34 Digital frequency transformations of a lowpass filter. (After Constantinides.)



例えば、bandpass filterではこうなる



https://jp.mathworks.com/help/signal/examples/introduction-to-filter-designer.html?requestedDomain=jp.mathworks.com　に詳細な説明あり